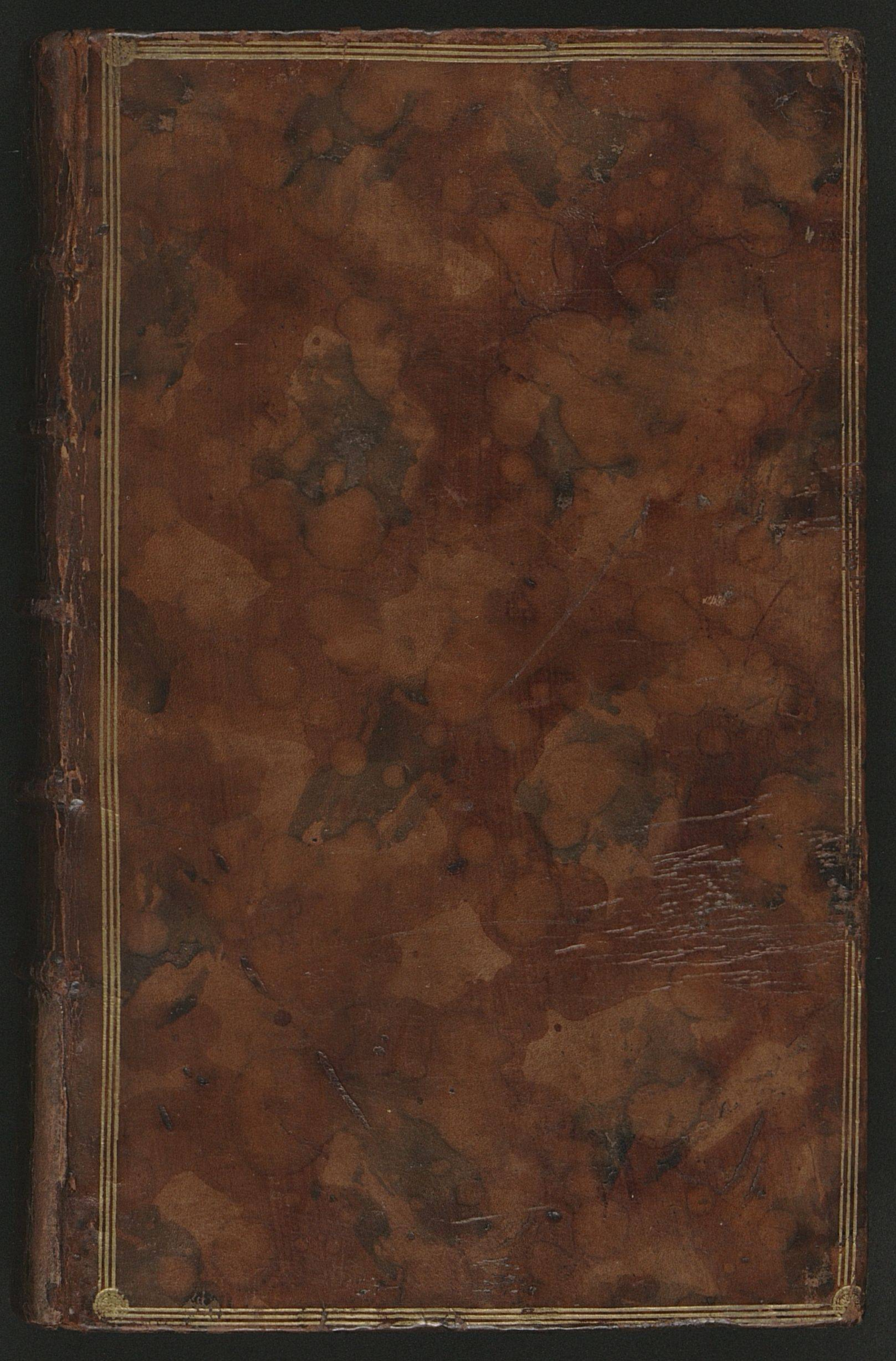
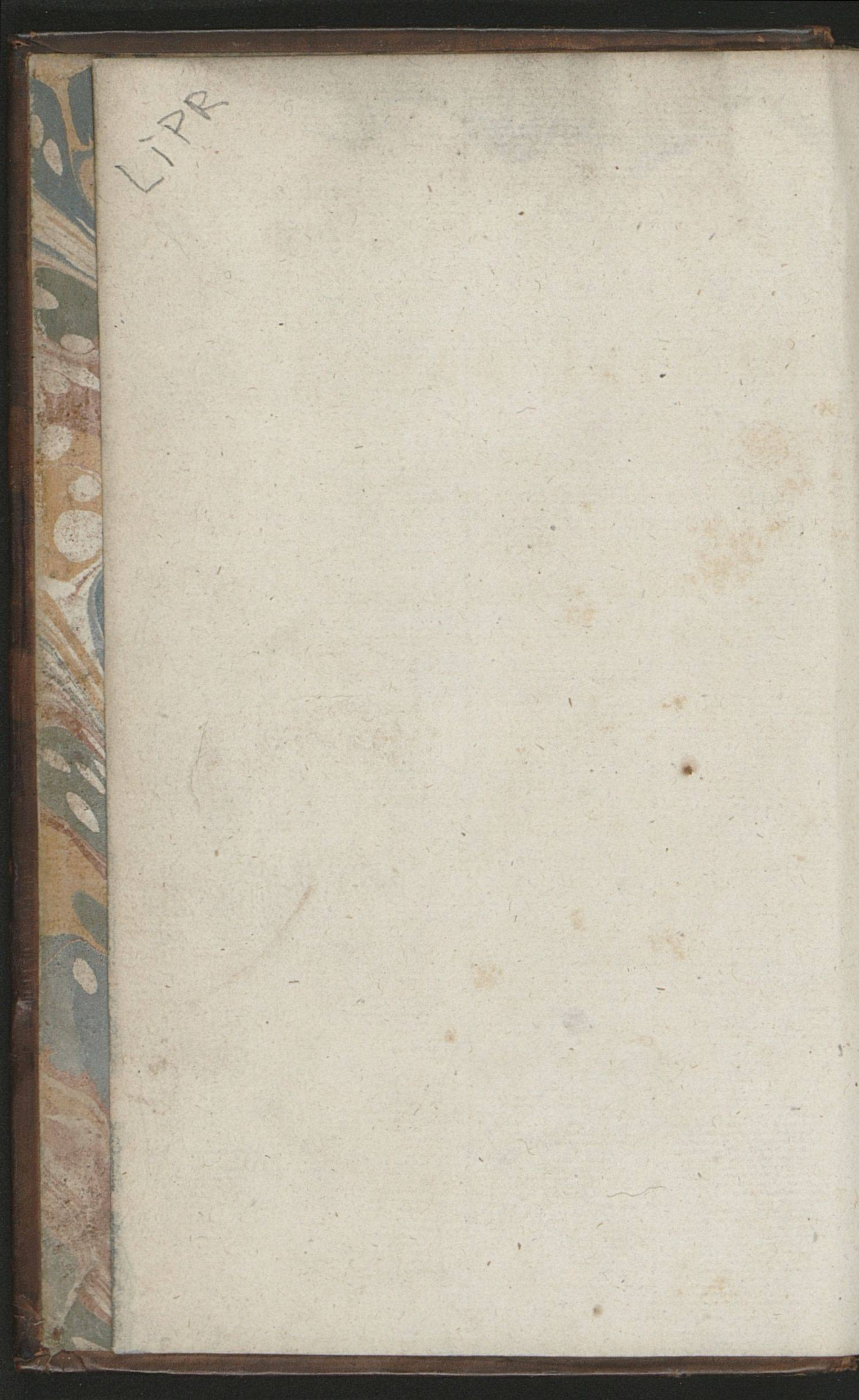



EX·LIBRIS
GEORGE·SARTON



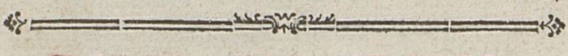

LIPR

ŒUVRES

DE

BLAISE PASCAL.

Cujus gloriæ neque profuit quiſquam laudando, nec vituperando quiſquam nocuit, cùm utrumque ſummis præditi fecerint ingeniis. TIT. LIV. Ex Hieronym. Prol. Lib. II, in Oſeam.



TOME CINQUIEME.



A LA HAYE,

CHEZ DETUNE, LIBRAIRE.

M. DCC. LXXIX.



TABLE DES MATIERES

CONTENUES DANS LE TOME CINQUIEME.

OUVRAGES de Mathématiques de Pascal.

Traité du Triangle Arithmétique, page 1

Divers usages du Triangle Arithmétique, 19

Usage du Triangle arithmétique pour les Ordres numériques, 20

Usage du Triangle arithmétique pour les Combinaisons, 23

Usage du Triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en plusieurs parties, 32

Usage du Triangle arithmétique pour trouver les puissances des Binomes & Apotomes, 54

Traité des Ordres numériques, 59

De numericis Ordinibus Tractatus, 67

De numericorum Ordinum Compositione, Problema primum, 68

De numericorum Ordinum Resolutione, Problema II, 70

De numericorum Ordinum Resolutione, Problema III, 73

De numericorum Ordinum Summâ, Problema IV, 74
De numericorum continuorum Productis, seu de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium, 76
Producta continuorum resolvere, seu Resolutio numerorum qui ex numeris progressione naturali procedentibus producuntur, 81
Numericarum potestatum generalis Resolutio, 84
Combinationes, 90
Potestatum numericarum Summa, 112
De Numeris multiplicibus ex solâ characterium numericorum additione agnoscendis, 123

PRoblemata de Cycloide proposita mense Junii 1658, 135
De eodem argumento Additamentum, 139
Réflexions sur les conditions des Prix attachés à la solution des Problêmes concernant la Cycloïde, 142
Annotata in quasdam solutiones Problematum de Cycloide, 156
Histoire de la Roulette, appellée autrement Trochoïde, ou Cycloïde, où l'on rapporte par

quels dégrés on est arrivé à la connoissance de cette ligne, 163

Historia Trochoidis, sive Cycloidis, gallicè, *la Roulette*, in quâ narratur quibus gradibus ad intimam illius lineæ naturam cognoscendam perventum sit, 178

Récit de l'examen & du jugement des Écrits envoyés pour les Prix proposés publiquement sur le sujet de la Roulette, où l'on voit que ces Prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la véritable solution des Problêmes, 193

Suite de l'Histoire de la Roulette, où l'on voit le procédé d'une personne qui avoit voulu s'attribuer l'invention des Problêmes proposés sur ce sujet, 200

Historiæ Trochoidis sive Cycloidis Continuatio, in quâ videre est cujusdam viri machinamenta qui se Autorem Problematum super hac re propositorum erat professus, 214

DIverses inventions de A. Dettonville en Géométrie.

Lettre de M. de Carcavi à M. Dettonville, 226

Lettre de M. Dettonville à M. de Carcavi, 229

Méthode générale pour les centres de gravité de toutes sortes de lignes, de surfaces & de solides, 241

La

La même méthode générale pour les centres de gravité, énoncée autrement, 250
Traité des Trilignes rectangles, & de leurs onglets, 276
Rapports entre les ordonnées à l'axe & les ordonnées à la base d'un triligne rectangle quelconque, 279
Rapports entre les sinus sur la base d'un triligne quelconque, & les portions de sa ligne courbe comprises entre le sommet & les ordonnées à l'axe, 286
Méthode générale pour trouver la dimension & les centres de gravité d'un triligne quelconque & de ses doubles onglets, par la seule connoissance des ordonnées à l'axe ou à la base, 297
Méthode pour trouver la dimension & le centre de gravité de la surface courbe des doubles onglets, par la seule connoissance des sinus sur l'axe, 308
Propriétés des sommes simples, triangulaires & pyramidales, 317
Traité des sinus du quart de cercle, 331
Traité des arcs de cercle, 346
Petit Traité des solides circulaires, 374
Traité général de la Roulette, ou Problêmes touchant la Roulette, proposés publiquement & résolus par A. Dettonville, 385

Résolution des Problêmes touchant la dimension & le centre de gravité du triligne & de ses demi-solides, 386

Résolution des derniers Problêmes touchant la dimension & le centre de gravité des surfaces des demi-solides de la Roulette, 395

Dimension des lignes courbes de toutes les Roulettes.

Lettre de M. Dettonville à M. Huguens de Zulichem, 402

Dimension des lignes courbes de toutes les Roulettes, 403

De l'Escalier, des Triangles cylindriques, & de la spirale autour d'un cône.

Lettre de M. Dettonville à M. de Sluze, Chanoine de la Cathédrale de Liege, 414

Pour la dimension & le centre de gravité de l'Escalier, 416

Pour la dimension & le centre de gravité des triangles cylindriques, 419

Dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône, 422

Égalité des lignes spirale & parabolique.

Lettre de M. Dettonville à M. A. D. D. S., 426

Propriétés du cercle, 429

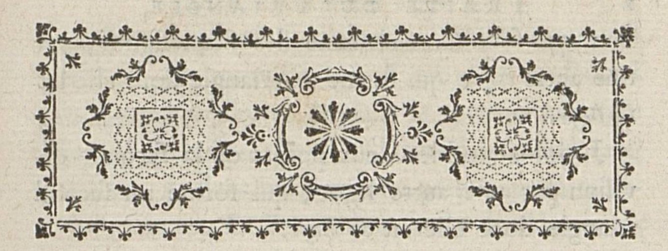
Propriétés de la spirale, 432

Propriétés de la parabole, 435

Pour inſcrire une figure en la parabole, 437
Pour circonſcrire une figure à la parabole, 438
Pour inſcrire une figure en la ſpirale, ibid.
Pour circonſcrire une figure à la ſpirale, 439
Rapports entre la parabole & la ſpirale, qui ont la condition ſuppoſée pour être dites correſpondantes, 441
Lettre de M. Huguens de Zulichem à M. Dettonville, 453
Lettre de M. Sluze à M. Paſcal, 456
Lettre de M. Sluze à M. Paſcal, 458
Lettre de M. Leibnitz à M. Périer, 459

Fin de la Table du Tome cinquieme.

OUVRAGES



OUVRAGES DE MATHÉMATIQUE DE PASCAL.

TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE.

DÉFINITIONS.

J'APPELLE *Triangle Arithmétique*, une figure dont la construction est telle.

Je mene d'un point quelconque, *G*, deux lignes perpendiculaires, l'une à l'autre, *GV*, *G*ζ, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales & continues à commencer par *G*, que je nomme 1, 2, 3, 4, &c.; & ces nombres sont *les exposants* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la premiere divi-

ſion qui ſont dans chacune des deux lignes, par une autre ligne qui forme un triangle dont elle eſt *la baſe*.

Je joins ainſi les deux points de la ſeconde diviſion par une autre ligne, qui forme un ſecond triangle dont elle eſt *la baſe*.

Et joignant ainſi tous les points de diviſion qui ont un même expoſant, j'en forme autant *de triangles & de baſes*.

Je mene par chacun des points de diviſion, des lignes paralleles aux côtés, qui par leurs interſections forment de petits quarrés, que j'appelle *cellules*.

Et les cellules qui ſont entre deux paralleles qui vont de gauche à droite, s'appellent *cellules d'un même rang parallele*, comme les cellules *G*, σ, π, &c., ou φ, ψ, θ, &c.

Et celles qui ſont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire*, comme les cellules *G*, φ, *A*, *D*, &c., & celles-ci, σ, ψ, *B*, &c.

Et celles qu'une même baſe traverſe diagonalement, ſont dites *cellules d'une même baſe*, comme celles qui ſuivent, *D*, *B*, θ, λ, & celles-ci, *A*, ψ, π.

Les cellules d'une même baſe également diſtantes de ſes extrémités, ſont dites *réciproques*, comme celles-ci, *E*, *R* & *B*, θ; parce que l'expoſant du rang parallele de l'une eſt le même que l'expoſant

ſant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroît en cet exemple, où *E* eſt dans le ſecond rang perpendiculaire, & dans le quatrieme parallele; & ſa réciproque *R* eſt dans le ſecond rang parallele, & dans le quatrieme perpendiculaire réciproquement. Et il eſt bien facile de démontrer que celles qui ont leurs expoſants réciproquement pareils, ſont dans une même baſe, & également diſtantes de ſes extrémités.

Il eſt auſſi bien facile de démontrer que l'expoſant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce ſoit, joint à l'expoſant de ſon rang parallele, ſurpaſſe de l'unité l'expoſant de ſa baſe. Par exemple, la cellule *F* eſt dans le troiſieme rang perpendiculaire, & dans le quatrieme parallele, & dans la ſixieme baſe, & les deux expoſants des rangs $3 + 4$ ſurpaſſent de l'unité l'expoſant de la baſe 6; ce qui vient de ce que les deux côtés du Triangle ſont diviſés en un pareil nombre de parties; mais cela eſt plutôt compris que démontré.

Cette remarque eſt de même nature, que chaque baſe contient une cellule plus que la précédente, & chacune autant que ſon expoſant d'unités; ainſi la ſeconde $\varphi\ \sigma$ a deux cellules, la troiſieme $A\,\psi\,\pi$ en a trois, &c.

Or les nombres qui ſe mettent dans chaque cellule ſe trouvent par cette méthode.

Le nombre de la premiere cellule qui eſt à l'an-

gle droit eſt arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres ſont forcés, & pour cette raiſon il s'appelle *le générateur* du triangle; & chacun des autres eſt ſpécifié par cette ſeule regle:

Le nombre de chaque cellule eſt égal à celui de la cellule qui la précede dans ſon rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précede dans ſon rang parallele. Ainſi la cellule *F*, c'eſt-à-dire, le nombre de la cellule *F*, égale la cellule *C*, plus la cellule *E*; & ainſi des autres.

D'où ſe tirent pluſieurs conſéquences. En voici les principales, où je conſidere les triangles, dont le générateur eſt l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

CONSÉQUENCE PREMIERE.

En tout Triangle Arithmétique, toutes les cellules du premier rang parallele & du premier rang perpendiculaire ſont pareilles à la génératrice.

Car par la conſtruction du Triangle, chaque cellule eſt égale à celle qui la précede dans ſon rang perpendiculaire, plus à celle qui la précede dans ſon rang parallele; or les cellules du premier rang parallele n'ont aucunes cellules qui les précedent dans leurs rangs perpendiculaires, ni celles du premier rang perpendiculaire dans leurs rangs paralleles; donc elles ſont toutes égales entre elles, & partant au premier nombre générateur.

Ainſi

Ainsi φ égale $G +$ zéro, c'est-à-dire, φ égale G.
Ainsi A égale $\varphi +$ zéro, c'est-à-dire, φ.
Ainsi σ égale $G +$ zéro, & π égale $\sigma +$ zéro.
Et ainsi des autres.

CONSÉQUENCE II.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement.

Soit une cellule quelconque ω : je dis qu'elle est égale à $R + \theta + \psi + \varphi$, qui sont celles du rang parallele supérieur depuis le rang perpendiculaire de ω jusqu'au premier rang perpendiculaire.

Cela est évident par la seule interprétation des cellules, par celles d'où elles sont formées.

Car ω égale $R + C$.

$\theta + B$

$\psi + A$

— Car A & φ sont φ égaux entre eux par la précédente.

Donc ω égale $R + \theta + \psi + \varphi$.

CONSÉQUENCE III.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précédent, comprises depuis son rang parallele jusqu'au premier inclusivement.

Soit une cellule quelconque C: je dis qu'elle est égale à $B + \psi + \sigma$, qui sont celles du rang perpendiculaire précédent, depuis le rang parallele de la cellule C jusqu'au premier rang parallele.

Cela paroît de même par la seule interprétation des cellules.

Car C égale $B + \underline{\theta}$.
$\psi + \pi$
— Car π égale σ par la
σ premiere.

Donc C égale $B + \psi + \sigma$.

CONSÉQUENCE IV.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule diminuée de l'unité, est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallele & son rang perpendiculaire exclusivement.

Soit une cellule quelconque ξ: je dis que $\xi - G$ égale $R + \theta + \psi + \varphi + \lambda + \pi + \sigma + G$, qui sont tous les nombres compris entre le rang $\xi \omega C B A$ & le rang $\xi S \mu$ exclusivement.

Cela paroît de même par l'interprétation.

Car

Car ξ égale $\lambda + R + \omega$.

$\overline{\pi + \theta + C}$

$\overline{\sigma + \psi + B}$

$\overline{G + \varphi + A}$

$\overline{G}$

Donc ξ égale $\lambda + R + \pi + \theta + \sigma + \psi + G + \varphi + G$.

AVERTISSEMENT.

J'ai dit dans l'énonciation, *chaque cellule diminuée de l'unité*, parce que l'unité eſt le générateur; mais ſi c'étoit un autre nombre, il faudroit dire, *chaque cellule diminuée du nombre générateur.*

CONSÉQUENCE V.

En tout Triangle Arithmétique, chaque cellule eſt égale à ſa réciproque.

Car dans la ſeconde baſe $\varphi\sigma$, il eſt évident que les deux cellules réciproques φ, σ ſont égales entre elles & à *G*.

Dans la troiſieme *A*, ψ, π, il eſt viſible de même que les réciproques π, *A* ſont égales entre elles & à *G*.

Dans la quatrieme, il eſt viſible que les extrêmes *D*, λ ſont encore égales entre elles & à *G*.

Et celles d'entre-deux, *B*, θ, ſont viſiblement égales, puiſque *B* égale $A + \psi$, & θ égale $\psi + \pi$; or

or $\pi + \psi$ ſont égales à $A + \psi$ par ce qui eſt montré; donc, &c.

Ainſi l'on montrera dans toutes les autres baſes que les réciproques ſont égales, parce que les extrêmes ſont toujours pareilles à G, & que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la baſe précédente qui ſont réciproques entre elles.

CONSÉQUENCE VI.

En tout Triangle Arithmétique, un rang parallele & un perpendiculaire qui ont un même expoſant, ſont composés de cellules toutes pareilles les unes aux autres.

Car ils ſont composés de cellules réciproques. Ainſi le ſecond rang perpendiculaire $\sigma \psi B E M Q$ eſt entiérement pareil au ſecond rang parallele $\varphi \psi \theta R S N$.

CONSÉQUENCE VII.

En tout Triangle Arithmétique, la ſomme des cellules de chaque baſe eſt double de celles de la baſe précédente.

Soit une baſe quelconque $D B \theta \lambda$: je dis que la ſomme de ſes cellules eſt double de la ſomme des cellules de la précédente $A \psi \pi$.

Car les extrêmes . . . D, λ,

égalent les extrêmes . . . A, π,

&

& chacune des autres . . . B, θ,
en égalent deux de
l'autre base . . . . . $\overline{A + \psi}$, $\overline{\psi + \pi}$.
Donc $D + \lambda + B + \theta$ égalent $2\,A + 2\,\psi + 2\,\pi$.

La même chose se démontre de même de toutes les autres.

CONSÉQUENCE VIII.

En tout Triangle Arithmétique, la somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression double, qui commence par l'unité, dont l'exposant est le même que celui de la base.

Car la premiere base est l'unité.

La seconde est double de la premiere, donc elle est 2.

La troisieme est double de la seconde, donc elle est 4. Et ainsi à l'infini.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur n'étoit pas l'unité, mais un autre nombre, comme 3, la même chose seroit vraie; mais il ne faudroit pas prendre les nombres de la progression double à commencer par l'unité, savoir, 1, 2, 4, 8, 16, &c., mais ceux d'une autre progression double à commencer par le générateur 3, savoir, 3, 6, 12, 24, 48, &c.

CONSÉQUENCE IX.

En tout Triangle Arithmétique, chaque base dimi-

nuée de l'unité eſt égale à la ſomme de toutes les précédentes.

Car c'eſt une propriété de la progreſſion double.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur étoit autre que l'unité, il faudroit dire, *chaque baſe diminuée du générateur.*

CONSÉQUENCE X.

En tout Triangle Arithmétique, la ſomme de tant de cellules continues qu'on voudra de ſa baſe, à commencer par une extrémité, eſt égale à autant de cellules de la baſe précédente, plus encore à autant, hormis une.

Soit priſe la ſomme de tant de cellules qu'on voudra de la baſe $D\lambda$, par exemple, les trois premieres, $D + B + \theta$: je dis qu'elle eſt égale à la ſomme des trois premieres de la baſe précédente $A + \psi + \pi$, plus aux deux premieres de la même baſe $A + \psi$.

Car	$D.$	$B.$	$\theta.$
égale	$A.$	$A + \psi.$	$\psi + \pi.$

Donc $D + B + \theta$ égale $2 A + 2 \psi + \pi$.

DÉFINITION.

J'appelle *cellules de la dividente*, celles que la ligne qui diviſe l'angle droit par la moitié, traverſe diagonalement comme les cellules G, ψ, C, ρ, &c.

CONSÉQUENCE

CONSÉQUENCE XI.

Chaque cellule de la dividente eſt double de celle qui la précede dans ſon rang parallele ou perpendiculaire.

Soit une cellule de la dividente *C*: je dis qu'elle eſt double de θ, & auſſi de *B*.

Car *C* égale θ + *B*, & θ égale *B*, par la cinquieme conſéquence.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces conſéquences ſont ſur le ſujet des égalités qui ſe rencontrent dans le Triangle Arithmétique. On va en voir maintenant les proportions, dont la propoſition ſuivante eſt le fondement.

CONSÉQUENCE XII.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même baſe, la ſupérieure eſt à l'inférieure, comme la multitude des cellules depuis la ſupérieure juſqu'au haut de la baſe, à la multitude de celles depuis l'inférieure juſqu'en bas incluſivement.

Soient deux cellules contiguës quelconques d'une même baſe, *E*, *C*: je dis que

E eſt à	*C* comme	2 à	3
inférieure,	ſupérieure,	parce qu'il y a deux cellules depuis *E* juſqu'en bas, ſavoir, *E*, *H*,	parce qu'il y a trois cellules depuis *C* juſqu'en haut, ſavoir, *C*, *R*, μ.

Quoique cette propoſition ait une infinité de cas, j'en

j'en donnerai une démonſtration bien courte, en ſuppoſant deux Lemmes.

Le premier, qui eſt évident de ſoi-même, que cette proportion ſe rencontre dans la ſeconde baſe; car il eſt bien viſible que φ eſt à σ comme 1 à 1.

Le deuxieme, que ſi cette proportion ſe trouve dans une baſe quelconque, elle ſe trouvera néceſſairement dans la baſe ſuivante.

D'où il ſe voit qu'elle eſt néceſſairement dans toutes les baſes : car elle eſt dans la ſeconde baſe par le premier Lemme; donc par le ſecond elle eſt dans la troiſieme baſe, donc dans la quatrieme, & à l'infini.

Il faut donc ſeulement démontrer le ſecond Lemme en cette ſorte. Si cette proportion ſe rencontre en une baſe quelconque, comme en la quatrieme D , c'eſt-à-dire, ſi D eſt à B comme 1 à 3; & B à θ comme 2 à 2; & θ à λ comme 3 à 1, &c. Je dis que la même proportion ſe trouvera dans la baſe ſuivante, $H\mu$, & que, par exemple, E eſt à C comme 2 à 3.

Car D eſt à B comme 1 à 3, par l'hypotheſe.
Donc $\underline{D + B}$ eſt à B comme $\underline{1 + 3}$ à 3.
E à B comme 4 à 3.
De même B eſt à θ comme 2 à 2, par l'hypotheſe.
Donc $\underline{B + \theta}$ à B, comme $\underline{2 + 2}$ à 2.
C à B comme 4 à 2.
Mais B à E comme 3 à 4, comme il

eſt

eſt montré. Donc par la proportion troublée, *C* eſt à *E* comme 3 à 2.

Ce qu'il falloit démontrer.

On le montrera de même dans tout le reſte, puiſque cette preuve n'eſt fondée que ſur ce que cette proportion ſe trouve dans la baſe précédente, & que chaque cellule eſt égale à ſa précédente, plus à ſa ſupérieure, ce qui eſt vrai par-tout.

CONSÉQUENCE XIII.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang perpendiculaire, l'inférieure eſt à la ſupérieure, comme l'expoſant de la baſe de cette ſupérieure à l'expoſant de ſon rang parallele.

Soient deux cellules quelconques dans un même rang perpendiculaire, *F*, *C*: je dis que

F est à	*C* comme	5 à	3
l'inférieure,	la ſupérieure,	expoſant de la baſe de *C*,	expoſant du rang parallele de *C*.

Car *E* eſt à *C* comme 2 à 3.

Donc $\underline{E + C}$ eſt à *C* comme $\underline{2 + 3}$ à 3.

F eſt à *C* comme 5 à 3.

CONSÉQUENCE XIV.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans un même rang parallele, la plus grande eſt à ſa précédente, comme l'expoſant de

la

la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire.

Soient deux cellules dans un même rang parallele *F*, *E*: je dis que

F est à *E* comme 5 à 2

la plus grande,	précédente,	exposant de la base de *E*,	exposant du rang perpendiculaire de *E*.

Car *E* est à *C* comme 2 à 3.

Donc $\overline{E + C}$ est à *E* comme $\overline{2 + 3}$ à 2.

F est à *E* comme 5 à 2.

CONSÉQUENCE XV.

En tout Triangle Arithmétique, la somme des cellules d'un quelconque rang parallele est à la derniere de ce rang, comme l'exposant du triangle est à l'exposant du rang.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrieme $GD\lambda$: je dis que quelque rang qu'on y prenne, comme le second parallele, la somme de ses cellules, savoir, $\varphi + \psi + \theta$, est à θ comme 4 à 2. Car $\varphi + \psi + \theta$ égale *C*, & *C* est à θ comme 4 à 2, par la treizieme conséquence.

CONSÉQUENCE XVI.

En tout Triangle Arithmétique, un quelconque rang parallele est au rang inférieur, comme l'exposant du rang inférieur à la multitude de ses cellules.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le cinquieme,

cinquieme, μGH : je dis que quelque rang qu'on y prenne, par exemple, le troiſieme, la ſomme de ſes cellules eſt à la ſomme de celles du quatrieme, c'eſt-à-dire, $A + B + C$ eſt à $D + E$, comme 4 expoſant du rang quatrieme, à 2, qui eſt l'expoſant de la multitude de ſes cellules, car il en contient 2.

Car $A + B + C$ égale F, & $D + E$ égale M. Or F eſt à M comme 4 à 2, par la douzieme conſéquence.

AVERTISSEMENT.

On pourroit l'énoncer auſſi de cette ſorte : *chaque rang parallele eſt au rang inférieur, comme l'expoſant du rang inférieur à l'expoſant du triangle, moins l'expoſant du rang ſupérieur.* Car l'expoſant d'un triangle moins l'expoſant d'un de ſes rangs, eſt toujours égal à la multitude des cellules du rang inférieur.

CONSÉQUENCE XVII.

En tout Triangle Arithmétique, quelque cellule que ce ſoit jointe à toutes celles de ſon rang perpendiculaire, eſt à la même cellule jointe à toutes celles de ſon rang parallele, comme les multitudes des cellules priſes dans chaque rang.

Soit une cellule quelconque B : je dis que $B + \psi + \sigma$ eſt à $B + A$, comme 3 à 2.

Je dis 3, parce qu'il y a trois cellules ajoutées dans l'antécédent; & 2, parce qu'il y en a deux dans le conſéquent.

Car

Car $B + \psi + \sigma$ égale C, par la troiſieme conſéquence; & $B + A$ égale E, par la ſeconde conſéquence.

Or C eſt à E comme 3 à 2, par la douzieme conſéquence.

CONSÉQUENCE XVIII.

En tout Triangle Arithmétique, deux rangs paralleles également diſtants des extrémités, ſont entre eux comme la multitude de leurs cellules.

Soit un triangle quelconque $GV\zeta$, & deux de ſes rangs également diſtants des extrémités, comme le ſixieme $P + Q$, & le ſecond $\varphi + \psi + \theta + R + S + N$: je dis que la ſomme des cellules de l'un eſt à la ſomme des cellules de l'autre, comme la multitude des cellules de l'un eſt à la multitude des cellules de l'autre.

Car par la ſixieme conſéquence, le ſecond rang parallele $\varphi\psi\theta RSN$ eſt le même que le ſecond rang perpendiculaire $\sigma\psi BEMQ$, duquel nous venons de démontrer cette proportion.

AVERTISSEMENT.

On peut l'énoncer ainſi : *En tout Triangle Arithmétique, deux rangs paralleles, dont les expoſants joints enſemble excedent de l'unité l'expoſant du Triangle, ſont entre eux comme leurs expoſants réciproquement.* Car ce n'eſt qu'une même choſe que ce qui vient d'être énoncé.

CONSÉQUENCE

CONSÉQUENCE DERNIERE.

En tout Triangle Arithmétique, deux cellules contiguës étant dans la dividente, l'inférieure est à la supérieure prise quatre fois, comme l'exposant de la base de cette supérieure, à un nombre plus grand de l'unité.

Soient deux cellules de la dividente ρ, C : je dis que ρ est à 4 C comme 5, exposant de la base de C, est à 6.

Car ρ est double de ω, & C de θ; donc 4 θ égalent 2 C.

Donc 4 θ sont à C comme 2 à 1.

Or ρ est à 4 C comme ω à 4 θ, ou en raison composée de . . . . ω à C + C à 4 θ

par les conséquences précédentes, 5 à 3. 1 à 2

ou 3 à 6.

5 à 6.

Donc ρ est à 4 C comme 5 à 6. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

On peut tirer de-là beaucoup d'autres proportions que je supprime, parce que chacun peut facilement les conclure, & que ceux qui voudront s'y attacher, en trouveront peut-être de plus belles que celles que je pourrois donner. Je finis donc par le Problême suivant, qui fait l'accomplissement de ce Traité.

PROBLÊME.

Étant donnés les exposants des rangs perpendiculaire & parallele d'une cellule, trouver le nombre de la cellule, sans se servir du Triangle Arithmétique?

Soit, par exemple, proposé de trouver le nombre de la cellule ξ du cinquieme rang perpendiculaire, & du troisieme rang parallele.

Ayant pris tous les nombres qui précedent l'exposant du perpendiculaire 5, savoir, 1, 2, 3, 4; soient pris autant de nombres naturels, à commencer par l'exposant du parallele 3, savoir, 3, 4, 5, 6.

Soient multipliés les premiers l'un par l'autre, & soit le produit 24. Soient multipliés les autres l'un par l'autre, & soit le produit 360, qui divisé par l'autre produit 24, donne pour quotient 15: ce quotient est le nombre cherché.

Car ξ est à la premiere de sa base *V*, en raison composée de toutes les raisons des cellules d'entre-deux, c'est-à-dire, ξ est à *V*, en raison composée

de	ξ à ρ +	ρ à *K* +	*K* à *Q* +	*Q* à *V*
ou par la 12 conséq.	3 à 4.	4 à 3.	5 à 2.	6 à 1.

Donc ξ est à *V* comme 3 en 4 en 5 en 6, à 4 en 3 en 2 en 1.

Mais *V* est l'unité; donc ξ est le quotient de la division du produit de 3 en 4 en 5 en 6, par le produit de 4 en 3 en 2 en 1.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

Si le générateur n'étoit pas l'unité, il eût fallu multiplier le quotient par le générateur.



DIVERS USAGES DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

Dont le générateur eſt l'unité.

APRÈS avoir donné les proportions qui ſe rencontrent entre les cellules & les rangs des Triangles Arithmétiques, je paſſe à divers uſages de ceux dont le générateur eſt l'unité; c'eſt ce qu'on verra dans les Traités ſuivants. Mais j'en laiſſe bien plus que je n'en donne; c'eſt une choſe étrange combien il eſt fertile en propriétés! Chacun peut s'y exercer; j'avertis ſeulement ici, que dans toute la ſuite, je n'entends parler que des Triangles Arithmétiques, dont le générateur eſt l'unité.



USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

POUR LES ORDRES NUMÉRIQUES.

ON a considéré dans l'Arithmétique les nombres des différentes progressions; on a aussi considéré ceux des différentes puissances & des différents dégrés; mais on n'a pas, ce me semble, assez examiné ceux dont je parle, quoiqu'ils soient d'un très-grand usage: & même ils n'ont pas de nom; ainsi j'ai été obligé de leur en donner: & parce que ceux de *progression*, de *dégré* & de *puissance* sont déja employés, je me sers de celui d'*ordres*.

J'appelle donc *Nombres du premier ordre*, les simples unités,

1, 1, 1, 1, 1, &c.

J'appelle *Nombres du second ordre*, les naturels qui se forment par l'addition des unités,

1, 2, 3, 4, 5, &c.

J'appelle *Nombres du troisieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des naturels, qu'on appelle *triangulaires*,

1, 3, 6, 10, &c.

C'est-à-dire, que le second des triangulaires, savoir, 3, égale la somme des deux premiers naturels, qui sont 1, 2; ainsi le troisieme triangulaire

laire 6 égale la somme des trois premiers naturels, 1, 2, 3, &c.

J'appelle *Nombres du quatrieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle *pyramidaux*,

1, 4, 10, 20, &c.

J'appelle *Nombres du cinquieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des précédents, auxquels on n'a pas donné de nom exprès, & qu'on pourroit appeller *triangulo-triangulaires* :

1, 5, 15, 35, &c.

J'appelle *Nombres du sixieme ordre*, ceux qui se forment par l'addition des précédents :

1, 6, 21, 56, 126, 252, &c.

Et ainsi à l'infini, 1, 7, 28, 84, &c.

1, 8, 36, 120, &c.

Or si on fait une table de tous les ordres des nombres, où l'on marque à côté les exposants des ordres, & au-dessus les racines, en cette sorte :

Racines.

		1	2	3	4	5	&c.
Unités	Ordre 1	1	1	1	1	1	&c.
Naturels	Ordre 2	1	2	3	4	5	&c.
Triangul.	Ordre 3	1	3	6	10	15	&c.
Pyramid.	Ordre 4	1	4	10	20	35	&c.

On trouvera cette Table pareille au Triangle Arithmétique ; & le premier ordre des nom-

bres ſera le même que le premier rang parallele du Triangle; le ſecond ordre des nombres ſera le même que le ſecond rang parallele : & ainſi à l'infini.

Car dans le Triangle Arithmétique le premier rang eſt tout d'unités, & le premier ordre des nombres eſt de même tout d'unités.

Ainſi dans le Triangle Arithmétique, chaque cellule, comme la cellule *F*, égale $C + B + A$, c'eſt-à-dire, qu'elle égale ſa ſupérieure, plus toutes celles qui précedent cette ſupérieure dans ſon rang parallele, comme il a été prouvé dans la deuxieme conſéquence du Traité de ce Triangle : & la même choſe ſe trouve dans chacun des ordres des nombres; car, par exemple, le troiſieme des pyramidaux 10 égale les trois premiers des triangulaires $1 + 3 + 6$, puiſqu'il eſt formé par leur addition.

D'où il ſe voit manifeſtement, que les rangs paralleles du triangle ne ſont autre choſe que les ordres des nombres, & que les expoſants des rangs paralleles ſont les mêmes que les expoſants des ordres, & que les expoſants des rangs perpendiculaires ſont les mêmes que les racines : & ainſi le nombre, par exemple, 21, qui dans le Triangle Arithmétique ſe trouve dans le troiſieme rang parallele, & dans le ſixieme rang perpendiculaire, étant conſidéré entre les ordres numériques, il ſera du troiſieme ordre, & le ſixieme de ſon ordre, ou de la ſixieme racine.

Ce

Ce qui fait connoître que tout ce qui a été dit des rangs & des cellules du Triangle Arithmétique, convient exactement aux ordres des nombres, & que les mêmes égalités & les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns, se trouveront aussi aux autres; il ne faudra seulement que changer les énonciations, en substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques, comme ceux de *racine* & d'*ordre*, à ceux qui convenoient au Triangle Arithmétique, comme de *rang parallele* & *perpendiculaire*. J'en donnerai un petit Traité à part, où quelques exemples qui y sont rapportés, feront aisément appercevoir tous les autres.

USAGE DU TRIANGLE
ARITHMÉTIQUE
POUR LES COMBINAISONS.

LE mot de *combinaison* a été pris en plusieurs sens différents; de sorte que pour ôter l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends.

Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manieres d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes celles qui sont présentées, s'appellent ici les *différentes combinaisons*.

Par exemple, ſi de quatre choſes exprimées par ces quatre lettres, *A*, *B*, *C*, *D*, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques; toutes les manieres d'en prendre deux différentes dans les quatre qui ſont propoſées, s'appellent *combinaiſons*.

Ainſi on trouvera par expérience, qu'il y a ſix manieres différentes d'en choiſir deux dans quatre; car on peut prendre *A* & *B*, ou *A* & *C*, ou *A* & *D*, ou *B* & *C*, ou *B* & *D*, ou *C* & *D*.

Je ne compte pas *A* & *A* pour une des manieres d'en prendre deux; car ce ne ſont pas des choſes différentes, ce n'en eſt qu'une répetée.

Ainſi je ne compte pas *A* & *B*, & puis *B* & *A* pour deux manieres différentes; car on ne prend en l'une & en l'autre maniere que les deux mêmes choſes, mais d'un ordre différent ſeulement, & je ne prends point garde à l'ordre; de ſorte que je pouvois m'expliquer en un mot à ceux qui ont accoutumé de conſidérer les combinaiſons, en diſant ſimplement que je parle ſeulement des combinaiſons qui ſe font ſans changer l'ordre.

On trouvera de même par expérience, qu'il y a quatre manieres de prendre trois choſes dans quatre; car on peut prendre *ABC*, ou *ABD*, ou *ACD*, ou *BCD*.

Enfin on trouvera qu'on ne peut en prendre quatre dans quatre qu'en une maniere, ſavoir, *ABCD*.

Je

Je parlerai donc en ces termes :

1 dans 4 ſe combine 4 fois.
2 dans 4 ſe combine 6 fois.
3 dans 4 ſe combine 4 fois.
4 dans 4 ſe combine 1 fois.

Ou ainſi :

La multitude des combinaiſons de 1 dans 4 eſt 4.
La multitude des combinaiſons de 2 dans 4 eſt 6.
La multitude des combinaiſons de 3 dans 4 eſt 4.
La multitude des combinaiſons de 4 dans 4 eſt 1.

Mais la ſomme de toutes les combinaiſons, en général, qu'on peut faire dans 4, eſt 15, parce que la multitude des combinaiſons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, & de 4 dans 4 étant jointes enſemble, font 15.

Enſuite de cette explication, je donnerai ces conſéquences en forme de Lemmes.

LEMME PREMIER.

Un nombre ne ſe combine point dans un plus petit, par exemple, 4 ne ſe combine point dans 2.

LEMME II.

1 dans 1 ſe combine 1 fois.
2 dans 2 ſe combine 1 fois.
3 dans 3 ſe combine 1 fois.

Et généralement un nombre quelconque ſe combine une fois ſeulement dans ſon égal.

LEMME

LEMME III.

1 dans 1 ſe combine 1 fois.
1 dans 2 ſe combine 2 fois.
1 dans 3 ſe combine 3 fois.

Et généralement l'unité ſe combine dans quelque nombre que ce ſoit autant de fois qu'il contient d'unités.

LEMME IV.

S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le ſecond plus grand de l'unité, le troiſieme tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne ſoit pas moindre que le ſecond, le quatrieme plus grand de l'unité que le troiſieme: la multitude des combinaiſons du premier dans le troiſieme, jointe à la multitude des combinaiſons du ſecond dans le troiſieme, égale la multitude des combinaiſons du ſecond dans le quatrieme.

Soient quatre nombres tels que j'ai dit:
Le premier tel qu'on voudra, par exemple, 1.
Le ſecond plus grand de l'unité, ſavoir, 2.
Le troiſieme tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne ſoit pas moindre que le ſecond, par exemple, 3.
Le quatrieme plus grand de l'unité, ſavoir, 4.

Je dis que la multitude des combinaiſons de 1 dans 3, plus la multitude des combinaiſons de 2 dans 3, égale la multitude des combinaiſons de 2 dans 4.

Soient

Soient trois lettres quelconques, *B*, *C*, *D*.

Soient les mêmes trois lettres, & une de plus, *A*, *B*, *C*, *D*.

Prenons, ſuivant la propoſition, toutes les combinaiſons d'une lettre dans les trois, *B*, *C*, *D*; il y en aura trois, ſavoir, *B*, *C*, *D*.

Prenons dans les mêmes trois lettres toutes les combinaiſons de deux, il y en aura trois, ſavoir, *BC*, *BD*, *CD*.

Prenons enfin dans les quatre lettres *A*, *B*, *C*, *D* toutes les combinaiſons de deux, il y en aura ſix, ſavoir, *AB*, *AC*, *AD*, *BC*; *BD*, *CD*.

Il faut démontrer que la multitude des combinaiſons de 1 dans 3 & celles de 2 dans 3, égalent celles de 2 dans 4.

Cela eſt aiſé; car les combinaiſons de 2 dans 4 ſont formées par les combinaiſons de 1 dans 3, & par celles de 2 dans 3.

Pour le faire voir, il faut remarquer qu'entre les combinaiſons de 2 dans 4, ſavoir, *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*, il y en a où la lettre *A* eſt employée, & d'autres où elle ne l'eſt pas.

Celles où elle n'eſt pas employée ſont, *BC*, *BD*, *CD*, qui par conſéquent ſont formées de deux de ces trois lettres, *B*, *C*, *D*; donc ce ſont des combinaiſons de 2 dans ces trois, *B*, *C*, *D*. Donc les combinaiſons de 2 dans ces trois lettres, *B*, *C*, *D*, font portion des combinaiſons de 2 dans ces quatre lettres,

lettres, *A*, *B*, *C*, *D*, puiſqu'elles forment celles où *A* n'eſt pas employée.

Maintenant ſi des combinaiſons de 2 dans 4 où *A* eſt employé, ſavoir, *AB*, *AC*, *AD*, on ôte l'*A*, il reſtera une lettre ſeulement de ces trois, *B*, *C*, *D*, ſavoir, *B*, *C*, *D*, qui ſont préciſément les combinaiſons d'une lettre dans les trois, *B*, *C*, *D*. Donc ſi aux combinaiſons d'une lettre dans les trois, *B*, *C*, *D*, on ajoute à chacune la lettre *A*, & qu'ainſi on ait *AB*, *AC*, *AD*, on formera les combinaiſons de 2 dans 4, où *A* eſt employé; donc les combinaiſons de 1 dans 3 ſont portion des combinaiſons de 2 dans 4.

D'où il ſe voit que les combinaiſons de 2 dans 4 ſont formées par les combinaiſons de 2 dans 3, & de 1 dans 3; & partant que la multitude des combinaiſons de 2 dans 4 égale celle de 2 dans 3, & de 1 dans 3.

On montrera la même choſe de tous les autres exemples, comme :

La multitude des combinaiſons de 29 dans 40, & la multitude des combinaiſons de 30 dans 40, égalent la multitude des combinaiſons de 30 dans 41. Ainſi la multitude des combinaiſons de 15 dans 55, & la multitude des combinaiſons de 16 dans 55, égalent la multitude des combinaiſons de 16 dans 56. Et ainſi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION

PROPOSITION PREMIERE.

En tout Triangle Arithmétique, la ſomme des cellules d'un rang parallele quelconque égale la multitude des combinaiſons de l'expoſant du rang dans l'expoſant du Triangle.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le quatrieme *GD*λ : je dis que la ſomme des cellules d'un rang parallele quelconque, par exemple, du ſecond, φ + ψ + θ, égale la ſomme des combinaiſons de ce nombre 2, qui eſt l'expoſant de ce ſecond rang, dans ce nombre 4, qui eſt l'expoſant de ce triangle.

Ainſi la ſomme des cellules du cinquieme rang du huitieme triangle égale la ſomme des combinaiſons de 5 dans 8, &c.

La démonſtration en ſera courte, quoiqu'il y ait une infinité de cas, par le moyen de ces deux Lemmes.

Le premier, qui eſt évident de lui-même, que dans le premier triangle cette égalité ſe trouve, puiſque la ſomme des cellules de ſon unique rang, ſavoir *G*, ou l'unité, égale la ſomme des combinaiſons de 1, expoſant du rang, dans 1, expoſant du Triangle.

Le deuxieme, que s'il ſe trouve un Triangle Arithmétique dans lequel cette proportion ſe rencontre, c'eſt-à-dire, dans lequel quelque rang que l'on prenne, il arrive que la ſomme des cellules ſoit égale à la multitude des combinaiſons de l'expoſant

posant du rang dans l'exposant du Triangle : je dis que le Triangle suivant aura la même propriété.

D'où il s'ensuit que tous les Triangles Arithmétiques ont cette égalité ; car elle se trouve dans le premier Triangle par le premier Lemme, & même elle est encore évidente dans le second ; donc par le second Lemme, le suivant l'aura de même, & partant le suivant encore ; & ainsi à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second Lemme.

Soit un triangle quelconque, par exemple, le troisieme, dans lequel on suppose que cette égalité se trouve, c'est-à-dire, que la somme des cellules du premier rang $G + \sigma + \pi$ égale la multitude des combinaisons de 1 dans 3 ; & que la somme des cellules du deuxieme rang $\varphi + \psi$ égale les combinaisons de 2 dans 3 ; & que la somme des cellules du troisieme rang A égale les combinaisons de 3 dans 3 : je dis que le quatrieme Triangle aura la même égalité, & que, par exemple, la somme des cellules du second rang $\varphi + \psi + \theta$ égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Car $\varphi + \psi + \theta$ égale $\varphi + \psi$ + θ

+ $G + \sigma + \pi$

Par l'hypothese — ou la multitude des combinais. de 2 dans 3. + ou la multitude des combinais. de 1 dans 3.

Par le quatrieme Lemme — Ou la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

On

On le montrera de même de tous les autres. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

Le nombre de quelque cellule que ce ſoit, égale la multitude des combinaiſons d'un nombre moindre de l'unité que l'expoſant de ſon rang parallele, dans un nombre moindre de l'unité que l'expoſant de ſa baſe.

Soit une cellule quelconque, *F*, dans le quatrieme rang parallele & dans la ſixieme baſe : je dis qu'elle égale la multitude des combinaiſons de 3 dans 5, moindres de l'unité que 4 & 6 : car elle égale les cellules $A + B + C$. Donc par la précédente, &c.

PROBLÊME I. PROPOSITION III.

Étant propoſés deux nombres, trouver combien de fois l'un ſe combine dans l'autre, par le Triangle Arithmétique?

Soient les nombres propoſés 4, 6, il faut trouver combien 4 ſe combine dans 6.

PREMIER MOYEN.

Soit priſe la ſomme des cellules du quatrieme rang du ſixieme triangle : elle ſatisfera à la queſtion.

SECOND MOYEN.

Soit priſe la cinquieme cellule de la ſeptieme baſe, parce

parce que ces nombres 5, 7 excedent de l'unité les donnés 4, 6 : ſon nombre eſt celui qu'on demande.

CONCLUSION.

Par le rapport qu'il y a des cellules & des rangs du Triangle Arithmétique aux combinaiſons, il eſt aiſé de voir que tout ce qui a été prouvé des uns convient aux autres ſuivant leur maniere; c'eſt ce que je montrerai en peu de diſcours dans un petit Traité que j'ai fait des Combinaiſons.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

Pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en pluſieurs parties.

POUR entendre les regles des partis, la premiere choſe qu'il faut conſidérer, eſt que l'argent que les Joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus, car ils en ont quitté la propriété; mais ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le haſard peut leur en donner, ſuivant les conditions dont ils ſont convenus d'abord.

Mais comme c'eſt une loi volontaire, ils peuvent la rompre de gré à gré, & ainſi en quelque terme

terme que le jeu ſe trouve, ils peuvent le quitter, & au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du haſard, & rentrer chacun en la propriété de quelque choſe; & en ce cas, le réglement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avoient droit d'eſpérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entiérement égal de prendre ce qu'on lui aſſigne, ou de continuer l'aventure du jeu: & cette juſte diſtribution s'appelle *le parti*.

Le premier principe qui fait connoître de quelle ſorte on doit faire les partis, eſt celui-ci.

Si un des Joueurs ſe trouve en telle condition, que, quoi qu'il arrive, une certaine ſomme doit lui appartenir en cas de perte & de gain, ſans que le haſard puiſſe la lui ôter; il ne doit en faire aucun parti, mais la prendre entiere comme aſſurée, parce que le parti devant être proportionné au haſard, puiſqu'il n'y a nul haſard de perdre, il doit tout retirer ſans parti.

Le ſecond eſt celui-ci. Si deux Joueurs ſe trouvent en telle condition, que ſi l'un gagne, il lui appartiendra une certaine ſomme, & s'il perd, elle appartiendra à l'autre; ſi le jeu eſt de pur haſard, & qu'il y ait autant de haſards pour l'un que pour l'autre, & par conſéquent non plus de raiſon de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent ſe ſéparer ſans jouer, & prendre ce qui leur appar-

tient légitimement, le parti eſt qu'ils ſéparent la ſomme qui eſt au haſard par la moitié, & que chacun prenne la ſienne.

Corollaire premier.

Si deux Joueurs jouent à un jeu de pur haſard, à condition que ſi le premier gagne, il lui reviendra une certaine ſomme, & s'il perd, il lui en reviendra une moindre; s'ils veulent ſe ſéparer ſans jouer, & prendre chacun ce qui leur appartient : le parti eſt, que le premier prenne ce qui lui revient en cas de perte, & de plus la moitié de l'excès, dont ce qui lui reviendroit en cas de gain, ſurpaſſe ce qui lui revient en cas de perte.

Par exemple, ſi deux Joueurs jouent à condition que ſi le premier gagne, il emportera 8 piſtoles, & s'il perd, il en emportera 2 : je dis que le parti eſt qu'il prenne ces 2, plus la moitié de l'excès de 8 ſur 2, c'eſt-à-dire, plus 3, car 8 ſurpaſſe 2 de 6, dont la moitié eſt 3.

Car par l'hypotheſe, s'il gagne, il emporte 8, c'eſt-à-dire, 6 + 2, & s'il perd, il emporte 2; donc ces 2 lui appartiennent en cas de perte & de gain : & par conſéquent par le premier principe, il ne doit en faire aucun parti, mais les prendre entieres. Mais pour les 6 autres, elles dépendent du haſard; de ſorte que s'il lui eſt favorable, il les gagnera, ſinon elles reviendront à l'autre, & par l'hypotheſe,

l'hypotheſe, il n'y a pas plus de raiſon qu'elles reviennent à l'un qu'à l'autre : donc le parti eſt qu'ils les ſéparent par la moitié, & que chacun prenne la ſienne, qui eſt ce que j'avois propoſé.

Donc pour dire la même choſe en d'autres termes, il lui appartient le cas de la perte, plus la moitié de la différence des cas de perte & de gain.

Et partant ſi en cas de perte, il lui appartient A, & en cas de gain $A + B$, le parti eſt qu'il prenne $A + \frac{1}{2} B$.

COROLLAIRE II.

Si deux Joueurs ſont en la même condition que nous venons de dire : je dis que le parti peut ſe faire de cette façon, qui revient au même, que l'on aſſemble les deux ſommes de gain & de perte, & que le premier prenne la moitié de cette ſomme; c'eſt-à-dire, qu'on joigne 2 avec 8, & ce ſera 10, dont la moitié 5 appartiendra au premier.

Car la moitié de la ſomme de deux nombres eſt toujours la même que la moindre plus la moitié de leur différence. Et cela ſe démontre ainſi.

Soit A ce qui revient en cas de perte, & $A + B$ ce qui revient en cas de gain : je dis que le parti ſe fait en aſſemblant ces deux nombres, qui font $A + A + B$, & en donnant la moitié au premier, qui eſt $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$. Car cette ſomme égale $A + \frac{1}{2} B$, qui a été prouvée faire le parti juſte.

Ces fondements étant posés, nous passerons aisément à déterminer le parti entre deux Joueurs qui jouent en tant de parties qu'on voudra en quelque état qu'ils se trouvent, c'est-à-dire, quel parti il faut faire quand ils jouent en deux parties, & que le premier en a une à point, ou qu'ils jouent en trois, & que le premier en a une à point, ou quand il en a deux à point, ou quand il en a deux à une. Et généralement en quelque nombre de parties qu'ils jouent, & en quelque gain de parties qu'ils soient, & l'un, & l'autre.

Sur quoi la premiere chose qu'il faut remarquer, est que deux Joueurs qui jouent en deux parties, dont le premier en a une à point, sont en même condition que deux autres qui jouent en trois parties, dont le premier en a deux, & l'autre une : car il y a cela de commun, que pour achever, il ne manque qu'une partie au premier, & deux à l'autre, & c'est en cela que consiste la différence des avantages, & qui doit régler les partis ; de sorte qu'il ne faut proprement avoir égard qu'au nombre des parties qui restent à gagner à l'un & à l'autre, & non pas au nombre de celles qu'ils ont gagnées, puisque, comme nous avons déja dit, deux Joueurs se trouvent en même état, quand jouant en deux parties, l'un en a une à point, que deux qui jouant en douze parties, l'un en a onze à dix.

Il faut donc propoſer la queſtion en cette ſorte.

Étant propoſés deux Joueurs, à chacun deſquels il manque un certain nombre de parties pour achever, faire le parti?

J'en donnerai ici la méthode, que je pourſuivrai ſeulement en deux ou trois exemples, qui ſeront ſi aiſés à continuer, qu'il ne ſera pas néceſſaire d'en donner davantage.

Pour faire la choſe générale ſans rien omettre, je la prendrai par le premier exemple, qu'il eſt peut-être mal à propos de toucher, parce qu'il eſt trop clair; je le fais pourtant pour commencer par le commencement : c'eſt celui-ci.

PREMIER CAS.

Si à un des Joueurs il ne manque aucune partie, & à l'autre quelques-unes, la ſomme entiere appartient au premier; car il l'a gagnée, puiſqu'il ne lui manque aucune des parties dans leſquelles il devoit la gagner.

SECOND CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre une, le parti eſt qu'ils ſéparent l'argent par la moitié, & que chacun prenne la ſienne : cela eſt évident par le ſecond principe. Il en eſt de même s'il manque deux parties à l'un, & deux à l'autre; & de même quelque nombre de parties qui manque à l'un, s'il en manque autant à l'autre.

TROISIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre deux, voici l'art de trouver le parti.

Confidérons ce qui appartiendroit au premier Joueur (à qui il ne manque qu'une partie) en cas de gain de la partie qu'ils vont jouer, & puis ce qui lui appartiendroit en cas de perte.

Il eft vifible que fi celui à qui il ne manque qu'une partie, gagne cette partie qui va fe jouer, il ne lui en manquera plus; donc tout lui appartiendra par le premier cas. Mais, au contraire, fi celui à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui en manquera plus qu'une; donc ils feront en telle condition, qu'il en manquera une à l'un, & une à l'autre. Donc ils doivent partager l'argent par la moitié, par le deuxieme cas.

Donc fi le premier gagne cette partie qui va fe jouer, il lui appartient tout, & s'il la perd, il lui appartient la moitié; donc en cas qu'ils veuillent fe féparer fans jouer cette partie, il lui appartient $\frac{3}{4}$ par le fecond Corollaire.

Et fi on veut propofer un exemple de la fomme qu'ils jouent, la chofe fera bien plus claire.

Pofons que ce foit 8 piftoles; donc le premier en cas de gain, doit avoir le tout, qui eft 8 piftoles, & en cas de perte, il doit avoir la moitié, qui eft 4; donc il lui appartient en cas de parti

la

la moitié de 8 + 4, c'eſt-à-dire, 6 piſtoles de 8; car 8 + 4 font 12, dont la moitié eſt 6.

QUATRIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre trois, le parti ſe trouvera de même, en examinant ce qui appartient au premier en cas de gain & de perte.

Si le premier gagne, il aura toutes ſes parties, & partant tout l'argent, qui eſt, par exemple, 8.

Si le premier perd, il ne faudra plus que deux parties à l'autre à qui il en falloit trois. Donc ils ſeront en tel état, qu'il faudra une partie au premier, & deux à l'autre; & partant par le cas précédent, il appartiendra 6 piſtoles au premier.

Donc en cas de gain, il lui en faut 8, & en cas de perte 6; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de ces deux ſommes, ſavoir, 7; car 6 + 8 font 14, dont la moitié eſt 7.

CINQUIEME CAS.

Si à un des Joueurs il manque une partie, & à l'autre quatre, la choſe eſt de même.

Le premier en cas de gain, gagne tout, qui eſt, par exemple, 8; & en cas de perte, il manque une partie au premier, & trois à l'autre; donc il lui appartient 7 piſtoles de 8; donc en cas de parti, il lui appartient la moitié de 8, plus la moitié de 7, c'eſt-à-dire, $7\frac{1}{2}$.

SIXIEME CAS.

Ainſi, s'il manque une partie à l'un, & cinq à l'autre; & à l'infini.

SEPTIEME CAS.

De même s'il manque deux parties au premier, & trois à l'autre; car il faut toujours examiner les cas de gain & de perte.

Si le premier gagne, il lui manquera une partie, & à l'autre trois; donc par le quatrieme cas il lui appartient 7 de 8.

Si le premier perd, il lui manquera deux parties, & à l'autre deux; donc par le deuxieme cas il appartient à chacun la moitié, qui eſt 4; donc en cas de gain, le premier en aura 7, & en cas de perte, il en aura 4; donc en cas de parti, il aura la moitié de ces deux enſemble, ſavoir, $5 \frac{1}{2}$.

Par cette méthode on fera les partis ſur toutes ſortes de conditions, en prenant toujours ce qui appartient en cas de gain & ce qui appartient en cas de perte, & aſſignant pour le cas de parti la moitié de ces deux ſommes.

Voilà une des manieres de faire les partis.

Il y en a deux autres, l'une par le Triangle Arithmétique, & l'autre par les Combinaiſons.

Méthode

Méthode pour faire les partis entre deux Joueurs qui jouent en plusieurs parties, par le moyen du Triangle Arithmétique.

Avant que de donner cette méthode, il faut faire ce Lemme.

LEMME.

Si deux Joueurs jouent à un jeu de pur hasard, à condition que si le premier gagne, il lui appartiendra une portion quelconque sur la somme qu'ils jouent, exprimée par une fraction, & que s'il perd, il lui appartiendra une moindre portion sur la même somme, exprimée par une autre fraction : s'ils veulent se séparer sans jouer, la condition du parti se trouvera en cette sorte. Soient réduites les deux fractions à même dénomination, si elles n'y sont pas ; soit prise une fraction dont le numérateur soit la somme des deux numérateurs, & le dénominateur double des précédents : cette fraction exprime la portion qui appartient au premier sur la somme qui est au jeu.

Par exemple, qu'en cas de gain, il appartienne les $\frac{3}{5}$ de la somme qui est au jeu, & qu'en cas de perte, il lui en appartienne $\frac{1}{5}$: je dis que ce qui lui appartient en cas de parti, se trouvera en prenant la somme des numérateurs, qui est 4, & le double du dénominateur, qui est 10, dont on fait la fraction $\frac{4}{10}$.

Car

Car par ce qui a été démontré au deuxieme Corollaire, il falloit assembler les cas de gain & de perte, & en prendre la moitié; or la somme des deux fractions $\frac{3}{5}$ + $\frac{1}{5}$ est $\frac{4}{5}$, qui se fait par l'addition des numérateurs, & sa moitié se trouve en doublant le dénominateur, & ainsi l'on a $\frac{4}{10}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Or ces regles sont générales & sans exception, quoi qui revienne en cas de perte ou de gain; car si, par exemple, en cas de gain, il appartient $\frac{1}{2}$, & en cas de perte, rien, en réduisant les deux fractions à même dénominateur, on aura $\frac{1}{2}$ pour le cas de gain, & $\frac{0}{2}$ pour le cas de perte; donc en cas de parti, il faut cette fraction $\frac{1}{4}$, dont le numérateur égale la somme des autres, & le dénominateur est double du précédent.

Ainsi si en cas de gain, il appartient tout, & en cas de perte $\frac{1}{3}$, en réduisant les fractions à même dénomination, on aura $\frac{3}{3}$ pour le cas de gain, & $\frac{1}{3}$ pour celui de la perte; donc en cas de parti, il appartient $\frac{4}{6}$.

Ainsi si en cas de gain, il appartient tout, & en cas de perte rien, le parti sera visiblement $\frac{1}{2}$; car le cas de gain est $\frac{1}{1}$, & le cas de perte $\frac{0}{1}$; donc le parti est $\frac{1}{2}$.

Et ainsi de tous les cas possibles.

PROBLÊME

PROBLÊME I. PROPOSITION I.

Étant proposés deux Joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle Arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer) eu égard aux parties qui manquent à chacun?

Soit prise dans le Triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble : ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la premiere, qu'il manque de parties au premier Joueur; & qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules, qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres : ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des Joueurs réciproquement : de sorte que si la somme qu'ils jouent est égale à la somme des nombres de toutes les cellules de la base, il en appartiendra à chacun ce qui est contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre; & s'ils jouent une autre somme, il leur en appartiendra à proportion.

Par exemple, qu'il y ait deux Joueurs, au premier desquels il manque deux parties, & à l'autre quatre : il faut trouver le parti.

Soient ajoutés ces deux nombres 2 & 4, & soit leur somme 6; soit prise la sixieme base du Triangle Arithmétique

Arithmétique $P\,\delta$, dans laquelle il y a par conséquent six cellules P, M, F, ω, S, δ. Soient prises autant de cellules à commencer par la premiere P, qu'il manque de parties au premier Joueur, c'est-à-dire, les deux premieres P, M; donc il en reste autant que de parties à l'autre, c'est-à-dire, quatre, F, ω, S, δ : je dis que l'avantage du premier est à l'avantage du second, comme $F+\omega+S+\delta$ à $P+M$, c'est-à-dire, que si la somme qui se joue est égale à $P+M+F+\omega+S+\delta$, il en appartient à celui à qui il manque deux parties la somme des quatre cellules $\delta+S+\omega+F$; & à celui à qui il manque quatre parties, la somme des deux cellules $P+M$: & s'ils jouent une autre somme, il leur en appartient à proportion.

Et pour le dire généralement, quelque somme qu'ils jouent, il en appartient au premier une portion exprimée par cette fraction . . . . . $\frac{F+\omega+S+\delta}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ dont le numérateur est la somme des quatre cellules de l'autre, & le dénominateur la somme de toutes les cellules; & à l'autre une portion exprimée par cette fraction, $\frac{P+M}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ dont le numérateur est la somme des deux cellules de l'autre, & le dénominateur la même somme de toutes les cellules.

Et

Et s'il manque une partie à l'un, & cinq à l'autre, il appartient au premier la somme des cinq premieres cellules $P+M+F+\omega+S$, & à l'autre la somme de la cellule δ.

Et s'il manque six parties à l'un, & deux à l'autre, le parti s'en trouvera dans la huitieme base, dans laquelle les six premieres cellules contiennent ce qui appartient à celui à qui il manque deux parties, & les deux autres ce qui appartient à celui à qui il en manque six. Et ainsi à l'infini.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux Lemmes.

Le premier, que la seconde base contient les partis des Joueurs, auxquels il manque deux parties en tout. Le deuxieme, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire, qu'elle contiendra aussi les partis des Joueurs, auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.

D'où je conclus en un mot que toutes les bases du Triangle Arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier Lemme ; donc par le second Lemme, la troisieme l'a aussi, & par conséquent la quatrieme ; & ainsi à l'infini. Ce qu'il falloit démontrer.

Il faut donc seulement démontrer ces 2 Lemmes.

Le

Le premier eſt évident de lui-même; car s'il manque une partie à l'un & une à l'autre, il eſt évident que leurs conditions ſont comme φ à σ, c'eſt-à-dire, comme 1 à 1, & qu'il appartient à chacun cette fraction, $\frac{\sigma}{\varphi + \sigma}$ qui eſt $\frac{1}{2}$.

Le deuxieme ſe démontrera de cette ſorte.

Si une baſe quelconque comme la quatrieme $D\lambda$ contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties, c'eſt-à-dire, que s'il manque une partie au premier, & trois au ſecond, la portion qui appartient au premier ſur la ſomme qui ſe joue, ſoit celle qui eſt exprimée par cette fraction . . . $\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda}$ qui a pour dénominateur la ſomme des cellules de cette baſe, & pour numérateur ſes trois premieres; & que s'il manque deux parties à l'un, & deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier ſoit $\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda}$; & que s'il manque trois parties au premier, & une à l'autre, la fraction du premier ſoit $\frac{D}{D + B + \theta + \lambda}$, &c. Je dis que la cinquieme baſe contient auſſi les partis de ceux auxquels il manque cinq parties; & que s'il manque, par exemple, deux parties au premier,

mier, & trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, est exprimée par cette fraction, $\frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu}$.

Car pour savoir ce qui appartient à deux Joueurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui appartiendroit au premier en cas de gain, & celle qui lui appartiendroit en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles n'y sont pas, & en former une fraction, dont le numérateur soit la somme des deux autres, & le dénominateur double de l'autre, par le Lemme précédent.

Examinons donc les fractions qui appartiendroient à notre premier Joueur en cas de gain & de perte.

Si le premier à qui il manque deux parties gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une partie, & à l'autre toujours trois; donc il leur manque quatre parties en tout; donc, par l'hypothese, leur parti se trouve en la base quatrieme, & il appartiendra au premier cette fraction . . . $\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda}$.

Si au contraire le premier perd, il lui manquera toujours deux parties, & deux seulement à l'autre; donc par l'hypothese la fraction du premier

sera

ſera $\frac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$. Donc en cas de parti il appartiendra au premier cette fraction . . . $\frac{D+B+\theta+D+B}{2D+2B+2\theta+2\lambda}$; c'eſt-à-dire, $\frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$.

Ce qu'il falloit démontrer.

Ainſi cela ſe démontre en toutes les autres baſes ſans aucune différence, parce que le fondement de cette preuve eſt qu'une baſe eſt toujours double de ſa précédente par la ſeptieme conſéquence, & que, par la dixieme conſéquence, tant de cellules qu'on voudra d'une même baſe ſont égales à autant de la baſe précédente (qui eſt toujours le dénominateur de la fraction en cas de gain) plus encore aux mêmes cellules, excepté une (qui eſt le numérateur de la fraction en cas de perte); ce qui étant vrai généralement par-tout, la démonſtration ſera toujours ſans obſtacle & univerſelle.

PROBLÊME II. PROPOSITION II.

Étant propoſés deux Joueurs qui jouent chacun une même ſomme en un certain nombre de parties propoſé, trouver dans le Triangle Arithmétique la valeur de la derniere partie ſur l'argent du perdant?

Par exemple, que deux Joueurs jouent chacun 3 piſtoles en quatre parties : on demande la valeur de la derniere partie ſur les 3 piſtoles du perdant.

Soit

Soit prise la fraction qui a l'unité pour numérateur, & pour dénominateur la somme des cellules de la base quatrieme, puisqu'on joue en quatre parties : je dis que cette fraction est la valeur de la derniere partie sur la mise du perdant.

Car si deux Joueurs jouant en quatre parties, l'un en a trois à point, & qu'ainsi il en manque une au premier, & quatre à l'autre, il a été démontré que ce qui appartient au premier pour le gain qu'il a fait de ses trois premieres parties, est exprimé par cette fraction, $\frac{H+E+C+R}{H+E+C+R+\mu}$, qui a pour dénominateur la somme des cellules de la cinquieme base, & pour numérateur ses quatre premieres cellules ; donc il ne reste sur la somme totale des deux mises que cette fraction . . . $\frac{\mu}{H+E+C+R+\mu}$, laquelle seroit acquise à celui qui a déja les trois premieres parties en cas qu'il gagnât la derniere ; donc la valeur de cette derniere sur la somme des deux mises est . . . . $\frac{\mu}{H+E+C+R+\mu}$, c'est-à-dire, $\frac{\text{l'unité}}{2D+2B+2\theta+2\lambda}$.

Or puisque la somme totale des mises est $2D+2B+2\theta+2\lambda$, la somme de chaque mise est $D+B+\theta+\lambda$; donc la valeur de la derniere

partie ſur la ſeule miſe du perdant eſt cette fraction, $\frac{1}{D + B + \theta + \lambda}$, double de la précédente, & laquelle a pour numérateur l'unité, & pour dénominateur la ſomme des cellules de la quatrieme baſe. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME III. PROPOSITION III.

Étant propoſés deux Joueurs qui jouent chacun une même ſomme en un certain nombre de parties donné, trouver dans le Triangle Arithmétique la valeur de la premiere partie ſur la miſe du perdant?

Par exemple, que deux Joueurs jouent chacun 3 piſtoles en quatre parties, on demande la valeur de la premiere ſur la miſe du perdant.

Soit ajouté au nombre 4 le nombre 3, moindre de l'unité, & ſoit la ſomme 7; ſoit priſe la fraction qui ait pour dénominateur toutes les cellules de la ſeptieme baſe, & pour numérateur la cellule de cette baſe qui ſe rencontre dans la dividente, ſavoir, cette fraction, $\frac{\rho}{V + Q + K + \rho + \xi + N + \zeta}$ je dis qu'elle ſatisfait au problême.

Car ſi deux Joueurs jouant en quatre parties, le premier en a une à point, il en reſtera trois à gagner au premier, & quatre à l'autre; donc il

appartient

appartient au premier ſur la ſomme des deux miſes cette fraction, $\frac{V+Q+K+\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$ qui a pour dénominateur toutes les cellules de la ſeptieme baſe, & pour numérateur ſes quatre premieres cellules.

Donc il lui appartient $V+Q+K+\rho$ ſur la ſomme totale des deux miſes, exprimée par $V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta$; mais cette derniere ſomme étant l'aſſemblage des deux miſes, il en avoit mis au jeu la moitié, ſavoir, $V+Q+K+\frac{1}{2}\rho$ (car $V+Q+K$ ſont égaux à $\zeta+N+\xi$).

Donc il a $\frac{1}{2}\rho$, c'eſt-à-dire, ω, plus qu'il n'avoit en entrant au jeu; donc il a gagné ſur la ſomme totale des deux miſes une portion exprimée par cette fraction, $\frac{\omega}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$; donc il a gagné ſur la miſe du perdant une portion qui ſera double de celle-là, ſavoir, celle qui eſt exprimée par cette fraction, $\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta}$.

Donc le gain de la premiere partie lui a acquis cette fraction; donc ſa valeur eſt telle.

COROLLAIRE.

Donc la valeur de la premiere partie de deux ſur la miſe du perdant, eſt exprimée par cette fraction, $\frac{1}{2}$.

Car en prenant cette valeur ſuivant la regle qui vient d'en être donnée, il faut prendre la fraction qui a pour dénominateur les cellules de la troiſieme baſe (parce que le nombre des parties en quoi on joue eſt 2, & le nombre moindre de l'unité eſt 1, qui avec 2 fait 3) & pour numérateur la cellule de cette baſe qui eſt dans la dividente; donc on aura cette fraction, $\frac{\downarrow}{A + \downarrow + \pi}$.

Or le nombre de la cellule ↓ eſt 2, & les nombres des cellules $A + \downarrow + \pi$, ſont, $1 + 2 + 1$. Donc on a cette fraction, $\frac{2}{1 + 2 + 1}$ c'eſt-à-dire, $\frac{2}{4}$, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}$.

Donc le gain de la premiere partie lui a acquis cette fraction; donc ſa valeur eſt telle. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME IV. PROPOSITION IV.

Étant propoſés deux Joueurs qui jouent chacun une même ſomme en un certain nombre de parties donné, trouver par le Triangle Arithmétique la valeur de la ſeconde partie ſur la miſe du perdant?

Soit le nombre donné des parties dans leſquelles on joue, 4; il faut trouver la valeur de la deuxieme partie ſur la miſe du perdant.

Soit

Soit priſe la valeur de la premiere partie par le Problême précédent : je dis qu'elle eſt la valeur de la ſeconde.

Car deux Joueurs jouant en quatre parties, ſi l'un en a deux à point, la fraction qui lui appartient eſt celle-ci, $\frac{P+M+F+\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$ qui a pour dénominateur la ſomme des cellules de la ſixieme baſe, & pour numérateur la ſomme des quatre premieres ; mais il en avoit mis au jeu cette fraction, $\frac{P+M+F}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, ſavoir, la moitié du tout. Donc il lui reſte de gain cette fraction, $\frac{\omega}{P+M+F+\omega+S+\delta}$, qui eſt la même choſe que celle-ci . . . .

$$\frac{\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta};$$ donc il a gagné ſur la moitié de la ſomme entiere, c'eſt-à-dire, ſur la miſe du perdant, cette fraction . . . . . .

$$\frac{2\rho}{V+Q+K+\rho+\xi+N+\zeta},$$ double de la précédente.

Donc le gain des deux premieres parties lui a acquis cette fraction ſur l'argent du perdant, qui

eſt le double de ce que la premiere partie lui avoit acquis par la précédente; donc la ſeconde partie lui en a autant acquis que la premiere.

CONCLUSION.

On peut aiſément conclure, par le rapport qu'il y a du Triangle Arithmétique aux partis qui doivent ſe faire entre deux Joueurs, que les proportions des cellules qui ont été données dans le Traité du Triangle, ont des conſéquences qui s'étendent à la valeur des partis, qui ſont bien aiſées à tirer, & dont j'ai fait un petit diſcours en traitant des partis, qui donne l'intelligence & le moyen de les étendre plus avant.

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE,

Pour trouver les puiſſances des Binomes & Apotomes.

S'IL eſt propoſé de trouver la puiſſance quelconque, comme le quatrieme dégré d'un binome, dont le premier nombre ſoit *A*, l'autre l'unité, c'eſt-à-dire, qu'il faille trouver le quarré-quarré de $A+1$; il faut prendre dans le Triangle Arithmétique la baſe cinquieme, ſavoir, celle dont l'expoſant

posant 5 est plus grand de l'unité que 4, exposant de l'ordre proposé : les cellules de cette cinquieme base sont, 1, 4, 6, 4, 1, dont il faut prendre le premier nombre 1 pour coéfficient de *A* au dégré proposé, c'est-à-dire, de A^4; ensuite il faut prendre le second nombre de la base, qui est 4, pour coéfficient de *A* au dégré prochainement inférieur, c'est-à-dire, de A^3, & prendre le nombre suivant de la base, savoir, 6, pour coéfficient de *A* au dégré inférieur, savoir, A^2, & le nombre suivant de la base, savoir, 4, pour coéfficient de *A* au dégré inférieur, savoir, *A* racine, & prendre le dernier nombre de la base 1 pour nombre absolu : & ainsi on aura $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, qui sera la puissance quarré-quarrée du binome $A + 1$. De sorte que si *A* (qui représente tout nombre) est l'unité, & qu'ainsi le binome $A + 1$ soit le binaire, cette puissance $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$ sera maintenant $1.1^4 + 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$. C'est-à-dire, une fois le quarré-quarré de l'unité *A*,

c'est-à-dire, ...	1
Quatre fois le cube de 1, c'est-à-dire, . . .	4
Six fois le quarré de 1, c'est-à-dire, ...	6
Quatre fois l'unité, c'est-à-dire, ...	4
Plus l'unité, ...	1
qui ajoutés font	16

Et en effet le quarré-quarré de 2 est 16.

Si *A* est un autre nombre, comme 4, & partant

que le binome $A+1$ ſoit 5, alors ſon quarré-quarré ſera toujours ſuivant cette méthode, $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, qui ſignifie maintenant $1.4^4 + 4.4^3 + 6.4^2 + 4.4 + 1$.

C'eſt-à-dire, une fois le quarré-quarré de 4, ſavoir 256
Quatre fois le cube de 4, ſavoir. 256
Six fois le quarré de 4 96
Quatre fois la racine 4 16
Plus l'unité 1
dont la ſomme 625

fait le quarré-quarré de 5 : & en effet le quarré-quarré de 5 eſt 625. Et ainſi des autres exemples.

Si on veut trouver le même dégré du binome $A+2$, il faut prendre de même $1A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$, & enſuite écrire ces quatre nombres 2, 4, 8, 16, qui ſont les quatre premiers dégrés de 2, ſous les nombres 4, 6, 4, 1, c'eſt-à-dire, ſous chacun des nombres de la baſe, en laiſſant le premier : en cette ſorte . . . . .

$$\begin{array}{ccccc} 1A^4 + & 4A^3 + & 6A^2 + & 4A + & 1 \\ & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

& multiplier les nombres qui ſe répondent l'un par l'autre. . . . .

$$\begin{array}{ccccc} 1A^4 + & 4A^3 + & 6A^2 + & 4A^1 + & 1 \\ & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

en cette ſorte . . . .

$$1A^4 + 8A^3 + 24A^2 + 32A^1 + 16$$

Et

Et ainſi on aura le quarré-quarré du binome $A+2$; de ſorte que ſi A eſt l'unité, ce quarré-quarré ſera tel.

Une fois le quarré-quarré de l'unité A . .	1
Huit fois le cube de l'unité	8
Vingt-quatre fois le quarré de 1	24
Trente-deux fois 1	32
Plus le quarré-quarré de 2	16
dont la ſomme	81

ſera le quarré-quarré de 3 : & en effet 81 eſt le quarré-quarré de 3.

Et ſi A eſt 2, alors $A+2$ ſera 4, & ſon quarré-quarré ſera

Une fois le quarré-quarré de A ou de 2, ſavoir	16
$8.\ 2^3$	64
$24.\ 2^2$	96
$32.\ 2$	64
Plus le quarré-quarré de 2	16
dont la ſomme	256

ſera le quarré-quarré de 4.

De la même maniere on trouvera le quarré-quarré de $A+3$, en mettant de la même ſorte

$$A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + 1$$

& au-deſſous les nombres 3 9 27 81

qui ſont les quatre premiers dégrés de 3; & multipliant les nombres correſpondants, on trouvera que le quarré-quarré de $A+3$ eſt . . . . .

$$1A^4 + 12A^3 + 54A^2 + 108A + 81.$$

Et ainſi à l'infini.

Si

Si au lieu du quarré-quarré on veut le quarré cube, ou le cinquieme dégré, il faut prendre la base sixieme, & en user comme j'ai dit de la cinquieme; & ainsi de tous les autres dégrés.

On trouvera de même les puissances des Apotomes $A - 1$, $A - 2$, &c. La méthode en est toute semblable, & ne differe qu'aux signes; car les signes de $+$ & de $-$ se suivent toujours alternativement, & le signe de $+$ est toujours le premier.

Ainsi le quarré-quarré de $A - 1$ se trouvera de cette sorte. Le quarré-quarré de $A + 1$ est par la regle précédente $1 A^4 + 4 A^3 + 6 A^2 + 4 A + 1$. Donc en changeant les signes comme j'ai dit, on aura $1 A^4 - 4 A^3 + 6 A^2 - 4 A + 1$.
Ainsi le cube de $A - 2$ se trouvera de même.
Car le cube de $A + 2$ par la regle précédente est

$$A^3 + 6 A^2 + 12 A + 8.$$

Donc le cube de $A - 2$ se trouvera en changeant les signes, $A^3 - 6 A^2 + 12 A - 8$.
Et ainsi à l'infini.

Je ne donne point la démonstration de tout cela, parce que d'autres en ont déja traité, comme Hérigogne (1), outre que la chose est évidente d'elle-même.

(1) Hérigogne, Mathématicien du siecle passé, publia, pour la premiere fois, en 1635, un Cours de Mathématiques, latin & françois, en 5 volumes *in*-8°.; & pour la seconde fois, en 1644, le même Ouvrage en 7 volumes.



TRAITÉ DES ORDRES *NUMÉRIQUES.*

JE présuppose qu'on a vu le Traité du Triangle Arithmétique, & son usage pour les Ordres numériques; autrement j'y renvoie ceux qui veulent voir ce discours, qui en est proprement une suite. J'y ai donné la définition des ordres numériques, & je ne la répéterai pas. J'y ai montré aussi que le Triangle Arithmétique n'est autre chose que la table des ordres numériques; ensuite de quoi il est évident que toutes les propriétés qui ont été données dans le Triangle Arithmétique entre les cellules ou entre les rangs, conviennent aux ordres numériques: de sorte que si peu qu'on ait l'art d'appliquer les propriétés des uns aux autres, il n'y a point de proposition dans le Traité du Triangle qui n'ait ses conséquences touchant les divers ordres: & cela est tout ensemble, & si facile, & si abondant,

J'ai sous la main la seconde édition. Dans le Traité d'Algebre (Chap. V, pag. 31) l'Auteur détermine immédiatement par le calcul, ou par des multiplications effectives, le quarré, le cube, &c., d'un binome tel que $a + b$ ou $a - b$. On voit ici que Pascal trouve, au moyen de son Triangle Arithmétique, les coéfficients des différents termes d'un binome élevé à une puissance quelconque entiere & positive.

dant, que je ſuis fort éloigné de vouloir tout donner expreſſément; j'aimerois mieux laiſſer tout à faire, puiſque la choſe eſt ſi aiſée; mais pour me tenir entre ces deux extrémités, j'en donnerai ſeulement quelques exemples, qui ouvriront le moyen de trouver tous les autres.

Par exemple : de ce qui a été dit dans une des conſéquences du Traité du Triangle, que *chaque cellule égale celle qui la précede dans ſon rang parallele, plus celle qui la précede dans ſon rang perpendiculaire*, j'en forme cette propoſition touchant les Ordres numériques.

PROPOSITION PREMIERE.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, égale celui qui le précede dans ſon ordre, plus ſon corradical de l'ordre précédent : & par conſéquent, le quatrieme, par exemple, des pyramidaux égale le troiſieme pyramidal, plus le quatrieme triangulo-triangulaire : ainſi le cinquieme triangulo-triangulaire égale le quatrieme triangulo-triangulaire, plus le cinquieme pyramidal, &c.

Autre exemple : de ce qui a été montré dans le Triangle, que *chaque cellule, comme* F, *égale* E + B + ✠ + σ, *c'eſt-à-dire, celle qui la précede dans ſon rang parallele, plus toutes celles qui précedent cette précédente dans ſon rang perpendiculaire*, je forme cette propoſition.

PROPOSITION

Proposition II.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, égale tous ceux tant de ſon ordre que de tous les précédents, dont la racine eſt moindre de l'unité que la ſienne; & partant le quatrieme des pyramidaux, par exemple, égale le troiſieme des pyramidaux, plus le troiſieme des triangulaires, plus le troiſieme des naturels, plus le troiſieme des unités, c'eſt-à-dire, l'unité.

D'où on peut maintenant tirer d'autres conſéquences, comme celle-ci, que je donne pour ouvrir le chemin à d'autres pareilles.

Proposition III.

Chaque nombre, de quelque cellule que ce ſoit, eſt composé d'autant de nombres qu'il y a d'ordres depuis le ſien juſqu'au premier incluſivement, chacun deſquels nombres eſt de chacun de ces ordres: ainſi un triangulo-triangulaire eſt composé d'un autre triangulo-triangulaire, d'un pyramidal, d'un triangulaire, d'un naturel & de l'unité.

Et ſi on veut en faire un problême, il pourra s'énoncer ainſi.

Proposition IV. Problême.

Étant donné un nombre d'un ordre quelconque, trouver un nombre dans chacun des ordres depuis le premier

premier jusqu'au sien inclusivement, dont la somme égale le nombre donné.

La solution en est facile : il faut prendre dans tous ces ordres les nombres dont la racine est moindre de l'unité que celle du nombre donné.

Autre exemple : de ce que *les cellules correspondantes sont égales entre elles*, il se conclut :

PROPOSITION V.

Que deux nombres de différents ordres sont égaux entre eux, si la racine de l'un est le même nombre que l'exposant de l'ordre de l'autre : & partant le troisieme pyramidal est égal au quatrieme triangulaire : le cinquieme du huitieme ordre est le même que le huitieme du cinquieme ordre, &c.

On n'auroit jamais achevé : par exemple,

PROPOSITION VI.

Tous les quatriemes nombres de tous les ordres sont les mêmes que tous les nombres du quatrieme ordre, &c.

Parce que *les rangs paralleles & perpendiculaires qui ont un même exposant, sont composés de cellules toutes pareilles*. Par cette méthode, on trouvera un rapport admirable en tout le reste, comme celui-ci :

PROPOSITION VII.

Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est au

prochainement

prochainement plus grand dans le même ordre, comme la racine du moindre est à cette même racine jointe à l'exposant de l'ordre, moins l'unité.

Ce qui s'ensuit de la quatorzieme conséquence du Triangle, où il est montré que *chaque cellule est à celle qui la précede dans son rang parallele, comme l'exposant de la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire.* Et afin de ne rien cacher de la maniere dont se tirent ces correspondances, j'en montrerai le rapport à découvert : il est un peu plus difficile ici que tantôt, parce qu'on ne voit point de rapport de la base des triangles avec les ordres des nombres ; mais voici le moyen de le trouver. Au lieu de *l'exposant de la base* dont j'ai parlé dans cette quatorzieme conséquence, il faut substituer *l'exposant du rang parallele, plus l'exposant du rang perpendiculaire moins l'unité* : ce qui produit le même nombre, & avec cet avantage, qu'on connoît le rapport qu'il y a de ces exposants avec les ordres numériques : car on sait qu'en ce nouveau langage, il faut dire, *l'exposant de l'ordre, plus la racine, moins l'unité.* Je dis tout ceci, afin de faire toucher la méthode pour faire & pour faciliter ces réductions. Ainsi on trouvera que

PROPOSITION VIII.

Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est à son corradical

corradical de l'ordre ſuivant, comme l'expoſant de l'ordre du moindre eſt à ce même expoſant joint à leur racine commune moins l'unité.

C'eſt la treizieme conſéquence du Triangle: ainſi on trouvera encore que

PROPOSITION IX.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, eſt à celui de l'ordre précédent, dont la racine eſt plus grande de l'unité que la ſienne, comme la racine du premier à l'expoſant de l'ordre du ſecond.

Ce n'eſt que la même choſe que la douzieme conſéquence du Triangle Arithmétique. J'en laiſſe beaucoup d'autres, chacune deſquelles, auſſi-bien que de celles que je viens de dónner, peut encore être augmentée de beaucoup par de différentes énonciations: car au lieu d'exprimer ces proportions comme j'ai fait, en diſant qu'*un nombre eſt à un autre comme un troiſieme à un quatrieme*, ne peut-on pas dire que *le rectangle des extrêmes eſt égal à celui des moyens?* & ainſi multiplier les propoſitions, & non ſans utilité; car étant regardées d'un autre côté, elles donnent d'autres ouvertures. Par exemple, ſi on veut tourner autrement cette derniere propoſition, on peut l'énoncer ainſi:

PROPOSITION X.

Un nombre, de quelque ordre que ce ſoit, étant multiplié

tiplié par la racine précédente, égale l'expofant de fon ordre, multiplié par le nombre de l'ordre fuivant procédant de cette racine.

Et parce que, quand quatre nombres font proportionnels, le rectangle des extrêmes ou des moyens étant divifé par un des deux autres, donne pour quotient le dernier, on peut dire auffi:

PROPOSITION XI.

Un nombre, de quelque ordre que ce foit, étant multiplié par la racine précédente, & divifé par l'expofant de fon ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre fuivant qui procede de cette racine.

Les manieres de tourner une même chofe font infinies : en voici un illuftre exemple, & bien glorieux pour moi. Cette même propofition que je viens de rouler en plufieurs fortes, eft tombée dans la penfée de notre célebre Confeiller de Touloufe M. de Fermat; &, ce qui eft admirable, fans qu'il m'en eût donné la moindre lumiere, ni moi à lui, il écrivoit dans fa Province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme nos Lettres écrites & reçues en même-temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru en cette occafion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une maniere tout-à-fait étrange, avec un homme fi grand & fi admirable, & qui dans toutes les recherches de la plus fublime Géométrie, eft dans le plus haut dé-

gré d'excellence, comme ſes Ouvrages, que nos longues prieres ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt voir à tous les Géometres de l'Europe, qui les attendent! La maniere dont il a pris cette même propoſition eſt telle.

En la progreſſion naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque étant mené dans le prochainement plus grand, produit le double de ſon triangle.

Le même nombre étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de ſa pyramide.

Le même nombre mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de ſon triangulo-triangulaire; & ainſi à l'infini, par une méthode générale & uniforme.

Voilà comment on peut varier les énonciations. Ce que je montre en cette propoſition s'entendant de toutes les autres, je ne m'arrêterai plus à cette maniere accommodante de traiter les choſes, laiſſant à chacun d'exercer ſon génie en ces recherches, où doit conſiſter toute l'étude des Géometres : car ſi on ne ſait pas tourner les propoſitions à tous ſens, & qu'on ne ſe ſerve que du premier biais qu'on a enviſagé, on n'ira jamais bien loin : ce ſont ces diverſes routes qui ouvrent les conſéquences nouvelles, & qui, par des énonciations aſſorties au ſujet, lient des propoſitions qui ſembloient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles étoient conçues

çues d'abord. Je continuerai donc ce ſujet en la maniere dont on a accoutumé de traiter la Géométrie, & ce que j'en dirai ſera comme un nouveau Traité des Ordres numériques; & même je le donnerai en latin, parce qu'il ſe rencontre que je l'ai écrit ainſi en l'inventant.



DE NUMERICIS ORDINIBUS *TRACTATUS.*

TRIANGULI Arithmetici tractatum, ipſiuſque circa numericos ordines uſum, ſupponit tractatus iſte, ut & plerique è ſequentibus : huc ergo mittitur lector horum cupidus; ibi noſcet quid ſint ordines numerici, nempe, unitates, numeri naturales, trianguli, pyramides, triangulo-trianguli, &c. Quæ cùm perlegerit, facilè hæc aſſequetur.

Hîc propriè oſtenditur connexio inter numerum cujuſvis ordinis cum ſuâ radice & exponente ſui ordinis, quæ talis eſt, ut ex his tribus, datis duobus quibuſlibet, tertius inveniatur. Verbi gratiâ, datâ radice & exponente ordinis, numerus ipſe datur; ſic dato numero & ſui ordinis exponente, radix elicitur; nec non ex dato numero & radice, exponens ordinis invenitur : hæc conſtituunt tria priora problemata, quartum de ſummâ ordinum agit.

DE NUMERICORUM ORDINUM
COMPOSITIONE:

PROBLEMA PRIMUM.

Datis numeri cujuslibet radice & exponente ordinis, componere numerum?

PRODUCTUS numerorum qui præcedunt radicem, dividat productum totidem numerorum quorum primus sit exponens ordinis: quotiens erit quæsitus numerus.

Propositum sit invenire numerum ordinis, verbi gratiâ, tertii, radicis verò quintæ.

Productus numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt radicem 5, nempe 24, dividat productum totidem numerorum continuorum 3, 4, 5, 6, quorum primus sit exponens ordinis 3, nempe 360: quotiens 15, est numerus quæsitus.

Nec difficilis demonstratio: eâdem enim prorsus constructione, inventa est, ad finem Tractatûs Trianguli Arithmetici, cellula quintæ seriei perpendicularis, tertiæ verò seriei parallelæ; cujus cellulæ numerus, idem est ac numerus quintus ordinis tertii, qui quæritur.

Potest autem & sic resolvi idem problema.

Productus numerorum qui præcedunt exponentem ordinis, dividat productum totidem numerorum

rum continuorum quorum primus ſit radix : quotiens eſt quæſitus.

Sic in propoſito exemplo, productus numerorum 1, 2, qui præcedunt exponentem ordinis 3, nempe 2, dividat productum totidem numerorum 5, 6, quorum primus ſit radix 5, nempe 30 : quotiens 15, eſt numerus quæſitus.

Nec differt hæc conſtructio à præcedente, niſi in hoc ſolo, quod in alterâ idem fit de radice, quod fit in alterâ de exponente ordinis : perinde ac ſi idem eſſet invenire, quintum numerum ordinis tertii, ac tertium numerum ordinis quinti ; quod quidem verum eſſe jam oſtendimus.

Hinc autem obiter colligere poſſumus arcanum numericum ; cùm enim ambo illi quotientes 15, ſint iidem, conſtat, diviſores eſſe inter ſe ut dividendos. Animadvertemus itaque :

Si ſint duo quilibet numeri, productus omnium numerorum primum ex ambobus propoſitis præcedentium, eſt ad productum totidem numerorum quorum primus eſt ſecundus ex his ambobus, ut productus ex omnibus qui præcedunt ſecundum ex illis ambobus, ad productum totidem numerorum continuorum quorum primus eſt primus ex iis ambobus propoſitis.

Hæc qui proſequeretur & demonſtraret, novi fortaſſis tractatûs materiam reperiret : nunc autem quia extra rem noſtram ſunt, ſic pergimus.

DE NUMERICORUM ORDINUM *RESOLUTIONE:*

PROBLEMA II.

Dato numero, ac exponente sui ordinis, invenire radicem?

POTEST autem & sic enuntiari.

Dato quolibet numero, invenire radicem maximi numeri ordinis numerici cujuslibet propositi, qui in dato numero contineatur?

Sit datus numerus quilibet, verbi gratiâ, 58, ordo verò numericus quicunque propositus, verbi gratiâ, *sextus.* Oportet igitur invenire radicem *sexti* ordinis numeri 58.

Exhibeatur ex unâ parte exponens ordinis . . . 6	& continuò	Exponatur ex alterâ parte numerus datus . . . 58
Multiplicetur ipse 6, per numerum 7, proximè majorem; sitque productus . . 42	& continuò	Multiplicetur ipse numerus per 2, sitque productus, ... 116
Multiplicetur iste productus per proximè sequentem	& continuò	Multiplicetur ipse productus per proximè sequentem multiplicatorem

multiplicatorem 8,		multiplicatorem 3,
ſitque productus,		ſitque productus,
. 336		 348
Multiplicetur iſte productus per proximè ſequentem multiplicatorem 9,	& continuò	Multiplicetur iſte productus per proximè ſequentem multiplicatorem 4,
ſitque productus,		ſitque productus,
. . . . 3024		 1392

Et ſic in infinitum, donec ultimus productus exponentis *6*, nempe 3024, major evadat quàm ultimus productus numeri dati nempe 1392; & tunc abſoluta eſt operatio: ultimus enim multiplicator dati numeri, nempe 4, eſt radix quæ quærebatur.

Igitur dico numerum ſexti ordinis cujus radix eſt 4, nempe 56, maximum eſſe ejus ordinis qui in numero dato contineatur, ſeu dico numerum ſexti ordinis cujus radix eſt 4, nempe 56, non eſſe majorem dato numero 58; numerum verò ejuſdem ordinis proximè majorem ſeu cujus radix eſt 5, nempe 126, eſſe majorem numero dato 58.

Etenim productus ille ultimus numeri dati, nempe 1392, factus eſt ex numero dato 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe 24; productus verò præcedens hunc ultimum, nempe 348, factus eſt ex numero dato 58, multiplicato per productum numerorum 1, 2, 3, nempe *6*.

Ergo productus numerorum 6, 7, 8, non est major producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per 58. Productus verò numerorum 6, 7, 8, 9, est major producto numerorum 1, 2, 3, 4, multiplicato per 58, *ex constructione.*

Jam numerus ordinis *sexti* cujus radix est 4, nempe 56, multiplicatus per numeros 1, 2, 3, æquatur producto numerorum 6, 7, 8, ex demonstratis in Tractatu de Ordinibus numericis.

Sed productus numerorum 6, 7, 8, non est major *ex ostensis*, producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per datum 58; igitur productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per 56, non est major quàm idem productus numerorum 1, 2, 3, multiplicatus per datum 58. Igitur 56 non est major quàm 58.

Jam sit 126, numerus ordinis *sexti* cujus radix est 5. Igitur ipse 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, æquatur producto numerorum 6, 7, 8, 9, ex Tractatu de Ordinibus numericis. Sed productus ille numerorum 6, 7, 8, 9, est major quàm numerus datus 58 multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, *ex ostensis.* Igitur, numerus 126, multiplicatus per productum numerorum 1, 2, 3, 4, est major quàm numerus datus 58 multiplicatus per eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4. Igitur numerus 126 est major quàm numerus datus 58.

Ergo

Ergo numerus 56 *ſexti* ordinis cujus radix eſt 4, non eſt major quàm numerus datus; numerus verò 126, ejuſdem ordinis cujus radix 5 eſt proximè major, major eſt quàm datus numerus.

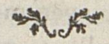
Ergo ipſe numerus 56, maximus eſt ejus ordinis qui in dato contineatur, & ejus radix 4 inventa eſt. Q. E. F. E. D.

DE NUMERICORUM ORDINUM *RESOLUTIONE:*

PROBLEMA III.

Dato quolibet numero, & ejus radice, invenire ordinis exponentem?

NON differt hoc problema à præcedente; radix enim, & exponens ordinis, reciproce convertuntur, ita ut dato numero, verbi gratiâ, 58, & ejus radice 4, reperietur exponens ſui ordinis 6, eâdem methodo, ac ſi dato numero ipſo 58, & exponente ordinis 4, radix 6, eſſet invenienda: *quartus* enim numerus *ſexti* ordinis idem eſt ac *ſextus quarti*, ut jam demonſtratum eſt.



DE

DE NUMERICORUM ORDINUM *SUMMÂ*:

PROBLEMA IV.

Propositi cujuslibet ordinis numerici, tot quot imperabitur, priorum numerorum summam invenire?

PROPOSITUM sit invenire summam *quinque*, verbi gratiâ, priorum numerorum ordinis, verbi gratiâ, *sexti*.

Inveniatur ex præcedente numerus *quintus* (quia *quinque* priorum numerorum summa requiritur) ordinis *septimi*, nempe ejus qui propositum *sextum* proximè sequitur : ipse satisfaciet problemati.

Numericorum enim ordinum generatio talis est, ut numerus cujusvis ordinis, æquetur summæ eorum omnium ordinis præcedentis quorum radices non sunt suâ majores; ita ut quintus septimi ordinis, æquetur, ex naturâ & generatione ordinum, quinque prioribus numeris sexti ordinis, quod difficultate caret.

CONCLUSIO.

METHODUS quâ ordinum resolutionem expedio est generalissima : verùm ipsam diù quæsivi; quæ primò sese obtulit ea est.

Si dati numeri quærebatur radix tertii ordinis, ita procedebam. *Sumatur duplum numeri propositi, istius*

istius dupli radix quadrata inveniatur: hæc quæsita est, aut saltem ea quæ unitate minor erit.

Si dati numeri quæritur radix quarti ordinis, *multiplicetur numerus datus per 6, nempe per productum numerorum 1, 2, 3; producti inveniatur radix cubica, ipsa, aut ea quæ unitate minor est, satisfaciet.*

Si dati numeri quæritur radix quinti ordinis, *multiplicetur datus numerus per 24, nempe per productum numerorum 1, 2, 3, 4, productique inveniatur radix quarti gradûs: ipsa unitate minuta, satisfaciet problemati.*

Et ita reliquorum ordinum radices quærebam, constructione non generali, sed cuique propriâ ordini; nec tamen ideo mihi omninò displicebat: illa enim quâ resolvuntur potestates non generalior est, aliter enim extrahitur radix quadrata, aliter cubica, &c., quamvis ab eodem principio viæ illæ differentes procedant. Ut ergo nondum generalis potestatum resolutio data erat, sic & vix generalem ordinum resolutionem assequi sperabam: conatus tamen expectationem superantes eam quam tradidi præbuerunt generalissimam, & quidem amicis meis, universalium solutionum amatoribus doctissimis, gratissimam; à quibus excitatus & generalem potestatum purarum resolutionem tentare, ad instar generalis ordinum resolutionis, obtemperans quæsivi, & satis feliciter mihi contigit reperisse, ut infrà videbitur.

DE



DE NUMERORUM CONTINUORUM PRODUCTIS,

Seu de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum ſerie naturali procedentium.

NUMERI qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum à nemine, quod ſciam, examinati ſunt. Ideo nomen eis impono nempe, *producti continuorum.*

Sunt autem qui ex duorum multiplicatione formantur, ut iſte 20 qui ex 4 in 5 oritur, & poſſent dici *ſecundæ ſpeciei.*

Sunt qui ex trium multiplicatione formantur, ut iſte 120 qui ex 4 in 5 in 6 oritur & dici poſſent *tertiæ ſpeciei.*

Sic *quartæ ſpeciei* dici poſſent qui ex quatuor numerorum continuorum multiplicatione formantur, & ſic in infinitum : ita ut, ex multitudine *multiplicatorum*, ſpecies nominationem exponentis ſortiretur; & ſic nullus eſſet productus primæ ſpeciei, nullus eſt enim productus ex uno tantùm numero.

Primum hujus tractatuli theorema, illud eſt quod obiter in præcedente tractatu annotavimus, quod quærendo, reliqua invenimus, imò & generalem

poteſtatum

poteſtatum reſolutionem; adeò ſtrictâ connexione ſibi mutuo cohærent veritates!

PROPOSITIO PRIMA.

Si ſint duo numeri quilibet, productus omnium numerorum primum præcedentium, eſt ad productum totidem numerorum continuorum à ſecundo incipientium: ut productus omnium numerorum ſecundum præcedentium, ad productum totidem numerorum continuorum à primo incipientium.

Sint duo numeri quilibet 5, 8: dico productum numerorum 1, 2, 3, 4, qui præcedunt 5, nempe 24, eſſe ad productum totidem continuorum numerorum 8, 9, 10, 11, nempe 7920: ut productum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, qui præcedunt 8, nempe 5640, ad productum totidem continuorum numerorum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, nempe 1663200.

Etenim productus numerorum 5, 6, 7, ductus in productum iſtorum 1, 2, 3, 4, efficit productum horum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; & idem productus numerorum 5, 6, 7, ductus in productum numerorum 8, 9, 10, 11, efficit productum horum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; ergo, ut productus numerorum 1, 2, 3, 4, ad productum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: ita productus numerorum 8, 9, 10, 11, ad productum numerorum 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Q. E. D.

PROPOSITIO

Propositio II.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis, est multiplex producti à totidem numeris continuis quorum primus est unitas; & quotiens est numerus figuratus.

Sit productus quilibet, à tribus, verbi gratiâ, numeris continuis 5, 6, 7, nempe 210, & productus totidem numerorum ab unitate incipientium 1, 2, 3, nempe 6 : dico ipsum 210 esse multiplicem ipsius 6, & quotientem esse numerum figuratum.

Etenim ipse 6, ductus in quintum numerum ordinis quarti, nempe 35, æquatur ipsi producto ex 5, 6, 7, ex demonstratis in Tractatu de Ordinibus numericis.

Propositio III.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex numeri cujusdam figurati, nempe ejus cujus radix est minimus ex his numeris, exponens verò ordinis est unitate major quàm multitudo horum numerorum.

Hoc patet ex præcedente. Et unica utrique convenit demonstratio.

Monitum.

Ambo divisores in his duabus propositionibus ostensi, tales sunt, ut alter alterius sit quotiens.

Ita

Ita ut quilibet productus à quotlibet numeris continuis, divisus per productum totidem numerorum ab unitate incipientium, ut secunda propositio docet fieri posse, quotiens sit numerus figuratus in tertiâ propositione enuntiatus.

PROPOSITIO IV.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus, est multiplex producti à quotlibet numeris continuis etiam ab unitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Sint quotlibet numeri continui ab unitate 1, 2, 3, 4, 5, quorum productus 120, quotlibet autem ex ipsis ab unitate incipientes 1, 2, 3, quorum productus *6* : dico 120 esse multiplicem *6*.

Etenim productus numerorum 1, 2, 3, 4, 5, fit ex producto numerorum 1, 2, 3, multiplicato per productum numerorum 4, 5.

PROPOSITIO V.

Omnis productus à quotlibet numeris continuis est multiplex producti à quotlibet numeris continuis ab unitate incipientibus quorum multitudo minor est.

Etenim productus continuorum quorumlibet est multiplex totidem continuorum ab unitate incipientium *ex secundâ*; sed *ex quartâ* productus continuorum ab unitate est multiplex producti continuorum ab unitate quorum multitudo minor est. Ergo, &c.

PROPOSITIO

Propositio VI.

Productus quotlibet continuorum, est ad productum totidem proximè majorum, ut minimus multiplicatorum ad maximum.

Sint quotlibet numeri 4, 5, 6, 7, quorum productus 840; & totidem proximè majores 5, 6, 7, 8, quorum productus 1680 : dico 840 esse ad 1680, ut 4 ad 8.

Etenim productus numerorum 4, 5, 6, 7, est factus ex producto continuorum 5, 6, 7, multiplicato per 4; productus verò continuorum 5, 6, 7, 8, factus est ex eodem producto continuorum 5, 6, 7, multiplicato per 8. Ergo, &c.

Propositio VII.

Minimus productus continuorum cujuslibet speciei, ille est cujus multiplicatores ab unitate incipiunt.

Verbi gratiâ, minimus productus ex quatuor continuis factus, ille est qui producitur ex quatuor his continuis 1, 2, 3, 4, qui quidem multiplicatores 1, 2, 3, 4, ab unitate incipiunt. Hoc ex se & ex præcedentibus patet.

PRODUCTA

PRODUCTA
CONTINUORUM RESOLVERE,

Seu Reſolutio numerorum qui ex numeris progreſſione naturali procedentibus producuntur.

PROBLEMA.

Dato quocunque numero, invenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, ſit maximus ejus ſpeciei qui in dato numero contineatur?

Oportet autem datum numerum non eſſe minorem producto totidem numerorum ab unitate continuorum.

DATUS ſit numerus, verbi gratiâ, 4335, oporteatque reperire, verbi gratiâ, *quatuor* numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus ſit maximus qui in dato 4335 contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione *quatuor* numerorum continuorum:

Sumantur ab unitate tot numeri continui quot ſunt numeri inveniendi, nempe *quatuor* in hoc exemplo, 1, 2, 3, 4, quorum per productum 24, dividatur numerus datus; ſitque quotiens 180. Ipſius quotientis inveniatur radix ordinis numerici non quidem *quarti*, ſed ſequentis, nempe *quinti*, ſitque

ea *6*; ipſe *6* eſt primus numerus, ſecundus 7, tertius 8, quartus *9*.

Dico itaque productum *quatuor* numerorum *6*, 7, 8, *9*, eſſe maximum numerum qui in dato contineatur, id eſt: dico productum *quatuor* numerorum *6*, 7, 8, *9*, nempe 3024, non eſſe majorem quàm numerum datum 4335; productum verò *quatuor* proximè majorum numerorum 7, 8, *9*, 10, nempe 5040, eſſe majorem numero dato 4335.

Etenim ex demonſtratis in Tractatu de Ordinibus numericis, conſtat productum numerorum 1, 2, 3, 4, ſeu 24, ductum in numerum quinti ordinis cujus radix eſt *6*, nempe 12*6*, efficere numerum æqualem producto numerorum *6*, 7, 8, *9*, nempe 3024; ſimiliter, & eundem productum numerorum 1, 2, 3, 4, nempe 24, ductum in numerum ejuſdem ordinis quinti cujus radix eſt 7, efficere numerum æqualem producto numerorum 7, 8, *9*, 10, nempe 5040.

Jam verò numerus quinti ordinis cujus radix eſt *6*, nempe 12*6*, cùm ſit maximus ejus ordinis qui in 180 contineatur, ex conſtructione patet ipſum 12*6* non eſſe majorem quàm 180, numerum verò quinti ordinis cujus radix eſt 7, nempe 210, eſſe majorem quàm ipſum 180.

Cùm verò numerus 4335 diviſus per 24, dederit 180, quotientem patet 180 ductum in 24, ſeu 4320, non eſſe majorem quàm 4335, ſed aut

æqualem

æqualem esse, aut differre numero minore quàm 24.

Itaque cùm sit 210 major quàm 180 ex constructione, patet 210 in 24, seu 5040, majorem esse quàm 180 in 24 seu 4320, & excessum esse ad minimum 24; numerus verò datus 4335, aut non excedit ipsum 4320, aut excedit numero minore quàm 24. Ergo numerus 5040, major est quàm datus 4335; id est productus numerorum 7, 8, 9, 10, major est dato numero.

Jam numerus 126, non est major quàm 180, ex constructione. Igitur 126 in 24, non est major quàm 180 in 24; sed 180 in 24, non est major dato numero ex ostensis. Ergo 126 in 24, seu productus numerorum 6, 7, 8, 9, non est major numero dato; productus autem numerorum 7, 8, 9, 10, ipso major est. Ergo, &c. Q. E. F. E. D.

Sic ergo exprimi potest & enuntiatio, & generalis constructio.

Invenire tot quot imperabitur numeros progressione naturali continuos, ex quorum multiplicatione ortus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur?

Dividatur numerus datus, per productum totidem numerorum ab unitate serie naturali procedentium quot sunt numeri inveniendi; inventoque quotiente, assumatur ipsius radix ordinis numerici cujus exponens est unitate major quàm multitudo

numerorum inveniendorum: ipſa radix eſt primus numerus, reliqui per incrementum unitatis in promptu habentur.

MONITUM.

Hæc omnia ex naturâ rei demonſtrari poterant, abſque Trianguli Arithmetici aut ordinum numericorum auxilio; non tamen fugienda illa connexio mihi viſa eſt, præſertim cùm ea ſit quæ lumen primum dedit. Et quod amplius eſt, alia demonſtratio laborioſior eſſet, & prolixior.

NUMERICARUM POTESTATUM
GENERALIS RESOLUTIO.

GENERALEM numericarum poteſtatum reſolutionem inquirenti, hæc mihi venit in mentem obſervatio: nihil aliud eſſe quærere *radicem, verbi gratiâ, quadratam dati numeri*, quàm quærere *duos numeros æquales quorum productus æquetur numero dato*. Sic & quærere *radicem cubicam* nihil aliud eſſe quàm quærere *tres numeros æquales quorum productus ſit datus*, & ſic de cæteris.

Itaque poteſtatis cujuſlibet reſolutio, eſt indagatio totidem numerorum æqualium, quot exponens poteſtatis continet unitates, quorum productus æquetur dato numero; poteſtates enim ipſæ nihil aliud ſunt quàm æqualium numerorum producti.

Sicut

Sicut enim in præcedenti tractatu, egimus de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum naturali progressione procedentium, sic & in hoc de potestatibus tractatu, agitur de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum æqualium.

Visum est itaque quàm proximos esse ambos hos tractatus, & nihil esse vicinius, producto ex æqualibus, quàm productum ex continuis solius unitatis incremento differentibus.

Quapropter potestatum resolutionem generalem, seu *productorum ex æqualibus* resolutionem, non mediocriter provectam esse censui, cùm eam *productorum ex continuis* generalis resolutio præcesserit.

Dato enim numero, cujus radix cujusvis gradûs quæritur, verbi gratiâ, *quarti*, quæruntur *quatuor* numeri æquales quorum productus æquetur dato; si ergo inveniantur ex præcedente tractatu, *quatuor* continui quorum productus æquetur dato, quis non videt, inventam esse radicem quæsitam, cùm ea sit unus ex his *quatuor* continuis? minimus enim ex his *quatuor*, *quater* sumptus & toties multiplicatus manifestè minor est producto continuorum; maximus verò ex his *quatuor*, *quater* sumptus ac toties multiplicatus, manifestè major est producto continuorum; radix ergo quæsita unus ex illis est.

Verùm latet adhuc ipsa in multitudine; reliquum

eſt igitur ut eligatur, & diſcernatur quis ex continuis ſatisfaciat quæſtioni.

Huic perquiſitioni nondum forte ſatis incubui, crudam tamen meditationem proferam, aliàs, ſi digna videatur, diligentiùs elaborandam.

POSTULATUM.

Hoc autem prænotum eſſe poſtulo; quæ ſit radix *quadrata* numeri 2, nempe 1; *etenim* 1 *eſt radix maximi quadrati in* 2 *contenti.* Sic & quæ ſit radix *cubica* numeri 6, *ſcilicet qui ex multiplicatione trium numerorum* 1, 2, 3, *oritur*, nempe 1. Sic & quæ ſit radix *quarti* gradûs numeri 24, *ſcilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum* 1, 2, 3, 4, *oritur*, nempe 2, & ſic de cæteris gradibus. In unoquoque enim peto noſci radicem, iſtius gradûs, numeri qui producitur ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab unitate quot exponens gradûs propoſiti continet unitates. Sic ergo in inveſtigatione radicis, verbi gratiâ, *decimi* gradûs, poſtulo notam eſſe radicem iſtius *decimi* gradûs, numeri 3628800, qui producitur ex multiplicatione *decem* priorum numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nempe 5. Et hoc uno verbo dici poteſt. In unoquoque gradu, poſtulo notam eſſe radicem iſtius gradûs minimi producti totidem continuorum quot exponens gradûs continet unitates; minimus enim productus continuorum quotlibet, ille eſt cujus multiplicatores ab unitate ſumunt exordium.

Nec

Nec ſanè moleſta hæc petitio eſt; in unoquoque enim gradu *unius* tantùm numeri radicem ſuppono, in vulgari autem methodo, multò graviùs in unoquoque gradu, *novem* priorum̄ characterum, poteſtates exiguntur.

Notum ſit ergo :

Producti numerorum	1, 2,	nempe	2	rad. quadr. eſſe	1
Producti numeror.	1, 2, 3,	nempe	6	rad. cub. eſſe	1
Producti num.	1, 2, 3, 4,	nempe	24	rad. 4 grad. eſſe	2
Prod. num.	1, 2, 3, 4, 5,	nempe	120	rad. 5 grad. eſſe	2
Pr. num.	1, 2, 3, 4, 5, 6,	nempe	720	rad. 6 grad. eſſe	2
Pr. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,	nem.	5040	rad. 7 grad. eſſe	3

&c.

PROBLEMA.

Dato quolibet numero, invenire radicem propoſitæ poteſtatis maximæ quæ in dato contineatur?

Sit datus numerus, verbi gratiâ, 4335, & invenienda ſit radix gradûs, verbi gratiâ, *quarti* maximi numeri *quarti* gradûs ſeu *quadrato-quadrati* qui in dato numero contineatur.

Inveniantur, ex præcedente tractatu, *quatuor* numeri continui (quia *quartus* gradus proponitur) quorum productus ſit maximus ejus ſpeciei qui in 4335 contineatur, ſintque ipſi 6, 7, 8, 9.

Radix quæſita eſt unus ex his numeris. Ut verò diſcernatur, ſic procedendum eſt.

Sumatur ex poſtulato radix *quarti* gradûs numeri qui producitur ex multiplicatione *quatuor* priorum

numerorum 1, 2, 3, 4, nempe radix *quadrato-quadrata* numeri 24 quæ eſt 2; ipſe 2 cum minimo continuorum inventorum 6 unitate minuto nempe 5 efficiet 7.

Hic 7 eſt minimus qui radix quæſita eſſe poſſit, omnes enim inferiores ſunt neceſſariò minores radice quæſitâ.

Jam triangulus *numeri* 4, qui exponens eſt propoſiti gradûs *quarti*, nempe 10, dividatur per ipſum exponentem 4, ſitque quotiens 2 (*ſuperfluum diviſionis non curo*): ipſe quotiens 2, cum minimo continuorum 6 junctus, efficit 8.

Ipſe 8 eſt maximus qui radix eſſe poſſit, omnes enim ſuperiores ſunt neceſſariò majores radice quæſitâ.

Denique conſtituantur *in quarto* gradu ipſi extremi numeri 7, 8, nempe 2401, 4096, necnon & omnes qui inter ipſos interjecti ſunt, *quod ad generalem methodum dictum ſit, hîc enim nulli inter 7 & 8 interjacent, ſed in remotiſſimis poteſtatibus quidam, quamvis perpauci, contingent.*

Harum poteſtatum, illa quæ æqualis erit dato numero, *ſi ita eveniat*, aut ſaltem quæ proximè minor erit dato numero, nempe 4096, ſatisfaciet problemati. Radix enim 8 unde orta eſt, ea eſt quæ quæritur.

Sic ergo inſtitui poteſt & enuntiatio & generalis conſtructio.

Invenire

Invenire numerum qui in gradu propoſito conſtitutus maximus ſit ejus gradûs qui in dato numero contineatur?

Inveniantur *ex tractatu præcedenti* tot numeri continui, quot ſunt unitates in exponente gradûs propoſiti, quorum productus ſit maximus ejus ſpeciei qui in dato numero contineatur. Et aſſumpto producto totidem continuorum ab unitate, inveniatur ejus radix gradûs propoſiti; *ex poſtulato* ipſa radix jungatur cum minimo continuorum inventorum unitate minuto : *hic erit minimus extremus.*

Jam triangulus exponentis ordinis per ipſum exponentem diviſus quemlibet præbeat quotientem, qui cum minimo continuorum inventorum jungatur : *hic erit maximus extremus.*

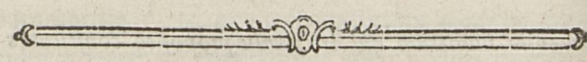
Ambo hi extremi ac numeri inter eos interpoſiti in gradu propoſito conſtituantur.

Harum poteſtatum, ea quæ dato numero erit aut æqualis aut proximè minor ſatisfacit problemati; radix enim unde orta eſt, radix quæſita eſt.

Horum demonſtrationem, paratam quidem, ſed prolixam etſi facilem, ac magis tædioſam quàm utilem ſupprimimus, ad illa, quæ plus afferunt fructûs quàm laboris, vergentes.



COMBINATIONES.



COMBINATIONES.

DEFINITIONES.

COMBINATIONIS nomen diversè à diversis usurpatur; dicam itaque quo sensu intelligam.

Si exponatur multitudo quævis rerum quarumlibet, ex quibus liceat aliquam multitudinem assumere, verbi gratiâ, si ex *quatuor* rebus per litteras *A*, *B*, *C*, *D*, expressis, liceat *duas* quasvis ad libitum assumere : singuli modi quibus possunt eligi *duæ* differentes ex his *quatuor* oblatis, vocantur hîc *combinationes*.

Experimento igitur patebit, *duas* posse assumi, inter *quatuor*, *sex* modis; potest enim assumi *A* & *B*, vel *A* & *C*, vel *A* & *D*, vel *B* & *C*, vel *B* & *D*, vel *C* & *D*.

Non constituo *A* & *A*, inter modos eligendi duas, non enim essent differentes; nec constituo *A* & *B*, & deinde *B* & *A*, tanquam differentes modos, ordine enim solummodò differunt, *ad ordinem autem non attendo :* ita ut uno verbo dixisse poteram, combinationes hîc considerari quæ nec mutato ordine procedunt.

Similiter experimento patebit, *tria* inter *quatuor*, *quatuor* modis assumi posse, nempe *ABC*, *ABD*, *ACD*, *BCD*.

Sic

Sic & *quatuor* in *quatuor*, *unico* modo aſſumi poſſe, nempe *ABCD*.

His igitur verbis utar :

1 in 4 combinatur 4 modis ſeu combinationibus.

2 in 4 combinatur 6 modis ſeu combinationibus.

3 in 4 combinatur 4 modis ſeu combinationibus.

4 in 4 combinatur 1 modo ſeu combinatione.

Summa autem omnium combinationum quæ fieri poſſunt in 4 eſt 15; ſumma enim combinationum 1 in 4, & 2 in 4, & 3 in 4, & 4 in 4, eſt 15.

LEMMA PRIMUM.

Numerus quilibet non combinatur in minore.

Verbi gratiâ, 4 non combinatur in 2.

LEMMA II.

1 *in* 1 *combinatur* 1 *combinatione.*

2 *in* 2 *combinatur* 1 *combinatione.*

3 *in* 3 *combinatur* 1 *combinatione.*

Et ſic generaliter omnis numerus ſemel tantùm in æquali combinatur.

LEMMA III.

1 *in* 1 *combinatur* 1 *combinatione.*

1 *in* 2 *combinatur* 2 *combinationibus.*

1 *in* 3 *combinatur* 3 *combinationibus.*

Et generaliter unitas in quovis numero toties combinatur quoties ipſe continet unitatem.

LEMMA IV.

Si sint quatuor numeri, primus ad libitum, secundus unitate major quàm primus, tertius ad libitum modò non sit minor secundo, quartus unitate major quàm tertius; multitudo combinationum primi in tertio, plus multitudine combinationum secundi in tertio, æquatur multitudini combinationum secundi in quarto.

Sint quatuor numeri ut dictum est:

Primus ad libitum, verbi gratiâ . . . . 1.
Secundus unitate major nempe . . . . 2.
Tertius ad libitum modò non sit minor quàm secundus, verbi gratiâ . . . . 3.
Quartus unitate major quàm tertius nempe 4.

Dico multitudinem combinationum 1 in 3, plus multitudine combinationum 2 in 3, æquari multitudini combinationum 2 in 4. *Quod ut paradigmate fiat evidentius:*

Assumantur *tres* characteres, nempe *B*, *C*, *D*, jam verò assumantur iidem *tres* characteres & *unus* prætereà, *A*, *B*, *C*, *D*; deinde assumantur combinationes *unius* litteræ in *tribus*, *B*, *C*, *D*, nempe *B*, *C*, *D*; assumantur quoque omnes combinationes *duarum* litterarum in *tribus* *B*, *C*, *D*, nempe *BC*, *BD*, *CD*; denique assumantur omnes combinationes *duarum* litterarum in *quatuor* *A*, *B*, *C*, *D*, nempe *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*.

Dico

Dico itaque, tot eſſe combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D,* quot ſunt *duarum* in *tribus B, C, D,* & inſuper quot *unius* in *tribus B, C, D.*

Hoc manifeſtum eſt ex generatione combinationum; combinationes enim *duarum* in *quatuor* formantur, partim ex combinationibus *duarum* in *tribus*, partim ex combinationibus *unius* in *tribus*; quod ita evidens fiet.

Ex combinationibus *duarum* in *quatuor*, nempe *AB, AC, AD, BC, BD, CD,* quædam ſunt in quibus ipſa littera *A* uſurpatur, ut iſtæ *AB, AC, AD*; quædam quæ ipsâ *A* carent ut iſtæ *BC, BD, CD.*

Porro, combinationes illæ *BC, BD, CD, duarum* in *quatuor A, B, C, D,* quæ ipſo *A* carent, conſtant ex reſiduis *tribus B, C, D*; ſunt ergo combinationes *duarum* in *tribus B, C, D*; igitur combinationes *duarum* in *tribus B, C, D,* ſunt quoque combinationes *duarum* in *quatuor A, B, C, D,* nempe illæ quæ carent ipſo *A.*

Illæ verò combinationes *AB, AC, AD, duarum* in *quatuor A, B, C, D,* in quibus *A* uſurpatur, ſi ipſo *A* ſpolientur, relinquent reſiduas litteras *B, C, D,* quæ ſunt ex *tribus* litteris *B, C, D,* ſuntque combinationes *unius* litteræ in *tribus B, C, D*; igitur combinationes *unius* litteræ in *tribus B, C, D,* nempe *B, C, D,* aſcito *A,* efficiunt *AB, AC, AD,*

quæ

quæ conſtituunt combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D,* in quibus *A* uſurpatur.

Igitur combinationes *duarum* litterarum in *quatuor A, B, C, D,* formantur partim ex combinationibus *unius* in *tribus B, C, D,* partim ex combinationibus *duarum* in *tribus B, C, D;* quare multitudo primarum æquatur multitudini reliquarum. Q. E. D.

Eodem prorſus modo in reliquis oſtendetur exemplis; verbi gratiâ:

Tot eſſe combinationes numeri . . . 29 in 40.
quot ſunt combinationes numeri . . . 29 in 39.
& inſuper quot ſunt combin. numeri 28 in 39.

Quatuor enim numeri 28, 29, 39, 40, conditionem requiſitam habent.

Sic tot ſunt combinationes numeri . . 16 in 56.
quot ſunt combinationes numeri . . . 16 in 55.
ac inſuper quot ſunt combin. numeri 15 in 55.
&c.

LEMMA V.

In omni Triangulo Arithmetico ſumma cellularum ſeriei cujuſlibet, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli.

Sit triangulus quilibet, verbi gratiâ, *quartus GDλ*: dico ſummam cellularum ſeriei cujuſvis, verbi gratiâ, *ſecundæ* $\varphi + \psi + \theta$, æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſecundæ ſeriei*, in numero 4, *exponente quarti trianguli.*

Sic

Sic dico ſummam cellularum ſeriei, verbi gratiâ, *quintæ* trianguli, verbi gratiâ, *octavi*, æquari multitudini combinationum numeri 5 in numero 8, &c.

Quamvis infiniti ſint hujus propoſitionis caſus, ſunt enim infiniti trianguli, breviter tamen demonſtrabo, poſitis duobus aſſumptis.

Primo, quod ex ſe patet, *in primo triangulo eam proportionem contingere :* ſumma enim cellularum unicæ ſuæ ſeriei, nempe numerus primæ cellulæ *G*, id eſt unitas, æquatur multitudini combinationum exponentis ſeriei, in exponente trianguli; hi enim exponentes ſunt unitates; unitas verò in unitate unico modo *ex Lemmate 2 hujus* combinatur.

Secundo, *ſi ea proportio in aliquo triangulo contingat; id eſt ſi ſumma cellularum uniuſcujuſcunque ſeriei trianguli cujuſdam, æquetur multitudini combinationum exponentis ſeriei in exponente trianguli: dico & eandem proportionem in triangulo proximè ſequenti contingere.*

His aſſumptis, facilè oſtendetur in ſingulis triangulis eam proportionem contingere; contingit enim in primo, *ex primo aſſumpto;* immò & manifeſta quoque ipſa eſt in ſecundo triangulo; ergo *ex ſecundo aſſumpto* & in ſequenti triangulo contingit, quare & in ſequenti & in infinitum.

Totum ergo negotium in ſecundi aſſumpti demonſtratione conſiſtit, quod ita expedietur.

Sit triangulus quilibet, verbi gratiâ, *tertius* in

quo

quo ſupponitur hæc proportio, id eſt, ſummam cellularum ſeriei *primæ* $G + \sigma + \pi$ æquari multitudini combinationum numeri 1, *exponentis ſeriei*, in numero 3, *exponente trianguli*; ſummam verò cellularum *ſecundæ ſeriei* $\varphi + \psi$ æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſeriei*, in numero 3, *exponente trianguli*; ſummam verò cellularum *tertiæ ſeriei*, nempe cellulam *A*, æquari combinationibus numeri 3, *exponentis ſeriei*, in 3 *exponente trianguli*: dico & eandem proportionem contingere & in ſequenti triangulo *quarto*, id eſt, ſummam cellularum, verbi gratiâ, *ſecundæ ſeriei* $\varphi + \psi + \theta$, æquari multitudini combinationum numeri 2, *exponentis ſeriei*, in numero 4, *exponente trianguli*.

Etenim $\varphi + \psi$ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 3 *ex hypotheſi*; cellula verò θ æquatur, *ex generatione trianguli arithmetici*, cellulis $G + \sigma + \pi$; hæ verò cellulæ æquantur *ex hypotheſi* multitudini combinationum numeri 1 in 3. Ergo cellulæ $\varphi + \psi + \theta$ æquantur multitudini combinationum numeri 2 in 3, plus multitudine combinationum numeri 1 in 3; hæ autem multitudines æquantur, *ex quarto Lemmate hujus*, multitudini combinationum numeri 2 in 4. Ergo ſumma cellularum $\varphi + \psi + \theta$ æquatur multitudini combinationum numeri 2 in 4. Q. E. D.

Idem

Idem LEMMA V problematicè enuntiatum.

Datis duobus numeris inæqualibus, invenire in triangulo arithmetico *quot modis minor in majore combinetur?*

Propoſiti ſint duo numeri, verbi gratiâ, 4 & 6, oportet reperire in triangulo arithmetico quot modis 4 combinetur in 6.

PRIMA METHODUS.

Summa cellularum *quartæ* ſeriei *ſexti* trianguli, ſatisfacit, *ex præcedente, nempe cellulæ* D + E + F. Hoc eſt numeri 1 + 4 + 10, ſeu 15 : ergo 4 in 6 combinatur 15 modis.

SECUNDA METHODUS.

Cellula *quinta*, baſis *ſeptimæ* K, ſatisfacit; *illi numeri* 5, 7, *ſunt proximè majores his* 4, 6.

Etenim illa cellula, nempe *K*, ſeu 15, æquatur ſummæ cellularum *quartæ* ſeriei *ſexti* trianguli *D + E + F*, ex generatione.

MONITUM.

In baſi *ſeptimâ* ſunt ſeptem cellulæ, nempe *V*, Q, *K*, ρ, ξ, *N*, ζ, ex quibus *quinta* aſſumenda eſt; poteſt autem ipſa duplici modo aſſumi, ſunt enim duæ baſis extremitates *V*, ζ : ſi ergo ab extremo *V* inchoaveris, erit *V* prima, Q ſecunda, *K* tertia, ρ quarta, ξ quinta quæſita. Si verò à ζ in-

cipias, erit ζ prima, *N* ſecunda, ξ tertia, ρ quarta, *K* quinta quæſita : ſunt igitur duæ quæ poſſunt dici, *quintæ*; ſed quoniam ipſæ ſunt æquè ab extremis remotæ, ideòque reciprocæ, ſunt ipſæ eædem; quare indifferenter aſſumi alterutra poteſt, & ab alterutrâ baſis extremitate inchoari.

MONITUM.

Jam ſatis patet, quàm bene conveniant combinationes & triangulus arithmeticus, & ideò, proportiones inter ſeries, aut inter cellulas trianguli obſervatas, ad combinationum rationes protendi, ut in ſequentibus videre eſt.

PROPOSITIO PRIMA.

Duo quilibet numeri, æquè combinantur in eo quod amborum aggregatum eſt.

Sint duo numeri quilibet 2, 4, quorum aggregatum 6 : dico numerum 2 toties combinari in 6, quoties ipſe 4 in eodem 6 combinatur, *nempe ſingulos, modis* 15.

Hoc nihil aliud eſt quàm conſectatio 4 trianguli arithmetici, & poteſt hoc uno verbo demonſtrari; *cellulæ enim reciprocæ ſunt eædem.* Si verò ampliori demonſtratione egere videatur, hæc ſatisfaciet.

Multitudo combinationum numeri 2 in 6 æquatur *ex* 5 *Lemmate*, ſeriei *ſecundæ* trianguli *ſexti*,

nempe

nempe cellulis $\varphi + \psi + \theta + R + S$, seu cellulæ ξ; sic multitudo quoque combinationum numeri 4 in 6 æquatur, *ex eodem*, seriei *quartæ* trianguli *sexti*, nempe cellulis $D + E + F$, seu cellulæ K; ipsa verò K, est reciproca ipsius ξ, ideòque ipsi æqualis; quare & multitudo combinationum numeri 2 in 6, æquatur multitudini combinationum numeri 4 in 6. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Ergo omnis numerus toties combinatur in proximè majori, quot sunt unitates in ipso majori.

Verbi gratiâ, numerus 6 in 7 combinatur *septies*, & 4 in 5 *quinquies*, &c. Ambo enim numeri 1, 6, æquè combinantur in aggregato eorum 7, *ex propositione hac* 1; sed 1 in 7 combinatur septies, *ex Lemmate* 3. Igitur 6 in 7 combinatur quoque septies.

PROPOSITIO II.

Si duo numeri combinentur in numero quod amborum aggregatum est unitate minuto; multitudines combinationum erunt inter se, ut ipsi numeri reciprocè.

Hoc nihil aliud est quàm consectatio 17 trianguli arithmetici.

Sint duo quilibet numeri 3, 5, quorum summa 8, unitate minuta, est 7: dico multitudinem combinationum numeri 3 in 7, esse ad multitudinem combinationum numeri 5 in 7, ut 5 ad 3.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 7, æquatur, *ex* 5 *Lemmate*, *tertiæ* ſeriei *ſeptimi* trianguli arithmetici, nempe $A+B+C+\omega+\xi$, ſeu 35. Multitudo autem combinationum numeri 5 in 7, æquatur, *ex eodem*, *quintæ* ſeriei ejuſdem *ſeptimi* trianguli, nempe $H+M+K$, ſeu 21; in triangulo autem *ſeptimo*, ſeries *quinta* & *tertia* ſunt inter ſe ut 3 ad 5, *ex conſectatione* 17 *trianguli arithmetici*, aggregatum enim exponentium ſerierum 5, 3, nempe 8, æquatur exponenti trianguli 7 unitate aucto.

PROPOSITIO III.

Si numerus combinetur, primò in numero qui ſui duplus *eſt, deinde in ipſomet numero* duplo *unitate minuto, prima combinationum multitudo, ſecundæ dupla erit.*

Hoc nihil aliud eſt quàm conſectatio 10 trianguli arithmetici.

Sit numerus quilibet 3, cujus duplus 6, qui unitate minutus, eſt 5 : dico multitudinem combinationum numeri 3 in 6, duplam eſſe multitudinis combinationum numeri 3 in 5.

Poſſem uno verbo dicere *omnis enim cellula dividentis dupla eſt præcedentis corradicalis:* ſic autem demonſtro.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, *ex* 5 *Lemmate*, cellulæ 4 baſis 7, nempe ρ,

ſeu

ſeu 20; quæ quidem ρ, medium baſis occupat locum, *quod indè procedit quòd* 3 *ſit dimidium* 6, *undè fit ut* 4 *proximè major quàm* 3, *medium occupet locum in numero* 7 *proximè majori quàm* 6. Igitur ipſa cellula *quarta* ρ eſt in dividente; quare dupla eſt cellulæ *F*, ſeu ω, *ex* 10 *conſectatione trianguli arithmetici*, quæ quidem ω eſt quoque *quarta* cellula baſis *ſextæ*; ideòque *ex Lemmate* 5, ipſa ω ſeu *F*, æquatur multitudini combinationum numeri 3 in 5; ergo multitudo combinationum 3 in 6 dupla eſt multitudinis combinationum 3 in 5. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

Si ſint duo numeri proximi, & alius quilibet in utroque combinetur, multitudo combinationum quæ fiunt in majore, erit ad alteram multitudinem, ut major numerus, ad ipſummet majorem dempto eo qui combinatus eſt.

Sint duo numeri unitate differentes 5, 6; & alius quilibet 2 combinetur in 5, & deinde in 6: dico multitudinem combinationum ipſius 2 in 6, eſſe ad multitudinem combinationum ipſius 2 in 5, ut 6 ad 6 — 2.

Hoc ex 13 conſectatione trianguli arithmetici eſt manifeſtum & ſic oſtendetur.

Multitudo enim combinationum ipſius 2 in 6, æquatur ſummæ cellularum ſeriei 2 trianguli 6,

nempe $\varphi + \psi + \theta + R + S$, *ex Lemmate* 5, hoc eſt cellulæ ξ, ſeu 15. Sed, *ex eodem*, multitudo combinationum ejuſdem 2 in 5, æquatur ſummæ cellularum ſeriei 2 trianguli 5, nempe $\varphi + \psi + \theta + R$, ſeu cellulæ ω, ſeu 10; eſt autem cellula ξ ad ω ut 6 ad 4, hoc eſt ut 6 ad $6 - 2$, ex 13 conſectatione trianguli arithmetici.

PROPOSITIO V.

Si duo numeri proximi, in alio quolibet combinentur, erit multitudo combinationum minoris, ad alteram, ut major numerus combinatus, ad numerum in quo ambo combinati ſunt dempto minore numero combinato.

Sint duo quilibet numeri proximi 3, 4, & alius quilibet 6: dico multitudinem combinationum *minoris* 3 in 6, eſſe ad multitudinem combinationum *majoris* 4 in 6, ut 4 ad $6 - 3$.

Hæc cum 11 conſectatione trianguli arithmetici convenit & ſic oſtendetur.

Multitudo enim combinationum numeri 3 in 6, æquatur, *ex Lemmate* 5, ſummæ cellularum ſeriei 3 trianguli 6, nempe $A + B + C + \omega$, ſeu cellulæ ρ, ſeu 20. Multitudo verò combinationum numeri 4 in 6, æquatur, *ex eodem*, ſummæ cellularum ſeriei 4 trianguli 6, nempe $D + E + F$, ſeu cellulæ K, ſeu 15; eſt autem ρ ad K ut 4 ad 3, ſeu ut 4 ad $6 - 3$, ex conſectatione 11 trianguli arithmetici.

PROPOSITIO

PROPOSITIO VI.

Si ſint duo numeri quilibet quorum minor in majore combinetur, ſint autem & alii duo his proximè majores quorum minor in majore quoque combinetur: erunt multitudines combinationum inter ſe, ut hi ambo ultimi numeri.

Sint duo quilibet numeri 2, 4, alii verò his proximè majores 3, 5: dico multitudinem combinationum numeri 2 in 4, eſſe ad multitudinem combinationum numeri 3 in 5, ut 3 ad 5.

Conſectatio 12 trianguli arithmetici hanc continet & ſic demonſtratur.

Multitudo enim combinationum ipſius 2 in 4, æquatur, *ex Lemmate* 5, ſummæ cellularum ſeriei 2 trianguli 4, nempe $\varphi + \psi + \theta$, ſeu cellulæ *C*, ſeu 6. Multitudo verò combinationum numeri 3 in 5, æquatur, *ex eodem*, ſummæ cellularum ſeriei 3 trianguli 5, nempe $A + B + C$, ſeu cellulæ *F*, ſeu 10; eſt autem *C* ad *F*, ut 3 ad 5, ex 12 conſectatione trianguli arithmetici.

LEMMA VI.

Summa omnium cellularum baſis trianguli cujuſlibet arithmetici unitate minuta, æquatur ſummæ omnium combinationum quæ fieri poſſunt in numero qui proximè minor eſt quàm exponens baſis.

Sit triangulus quilibet arithmeticus, verbi gratiâ,

quintus GHμ : dico ſummam cellularum ſuæ baſis $H+E+C+R+\mu$, minus unitate, *ſeu minus unâ ex extremis* H *vel* μ, æquari ſummæ omnium combinationum quæ fieri poſſunt in numero 4 qui proximè minor eſt quàm exponens baſis 5. Id eſt: dico ſummam cellularum $R+C+E+H$ (*ſupprimo enim extremam* μ) id eſt $4+6+4+1$, ſeu 15, æquari multitudini combinationum numeri 1 in 4, nempe 4; plus multitudine combinationum numeri 2 in 4, nempe 6; plus multitudine combinationum numeri 3 in 4, nempe 4; plus multitudine combinationum numeri 4 in 4, nempe 1. *Quæ quidem ſunt omnes combinationes quæ fieri poſſunt in* 4; *ſuperiores enim numeri* 5, 6, 7, *&c. non combinantur in numero* 4: *major enim numerus in minore non combinatur.*

Multitudo enim combinationum numeri 1 in 4, æquatur, *ex* 5 *Lemmate*, cellulæ 2 baſis 5, nempe *R*, ſeu 4. Multitudo verò combinationum numeri 2 in 4, æquatur cellulæ 3 baſis 5, nempe *C*, ſeu 6. Multitudo quoque combinationum numeri 3 in 4, æquatur cellulæ 4 baſis 5, nempe *E*, ſeu 4. Multitudo denique combinationum numeri 4 in 4, æquatur cellulæ 5 baſis 5, nempe *H*, ſeu 1. Igitur ſumma cellularum baſis *quintæ* demptâ extremâ ſeu unitate, æquatur ſummæ omnium combinationum quæ poſſunt fieri in 4.

PROPOSITIO

PROPOSITIO VII.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet, unitate aucta, est numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, quippe ille cujus exponens est numerus proximè major quàm datus.

Sit numerus quilibet, verbi gratiâ, 4: dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctam, nempe 16, esse numerum *quintum* (nempe proximè majorem quàm *quartum*) progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium.

Hoc nihil aliud est quàm 7 consectatio trianguli arithmetici, & sic uno verbo demonstrari posset, *omnis enim basis est numerus progressionis duplæ:* sic tamen demonstro.

Summa enim combinationum omnium quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, *ex Lemmate 6*, summæ cellularum basis *quintæ*; ipsa verò basis est *quintus* numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium, ex 7 consectatione trianguli arithmetici.

PROPOSITIO VIII.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in numero quolibet unitate aucta, dupla est summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in numero proximè minore unitate auctæ.

Hoc convenit cum 6 consectatione trianguli arithmetici,

metici, nempe *omnis basis dupla est præcedentis:* sic autem ostendemus.

Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate auctam, nempe 32, esse duplam summæ combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15, unitate auctæ, nempe 16.

Summa enim combinationum quæ fieri possunt in 5, unitate aucta, æquatur, *ex præcedente*, *sexto* numero progressionis duplæ. Summa verò combinationum quæ fieri possunt in 4, unitate aucta, æquatur, *ex eâdem*, *quinto* numero progressionis duplæ. *Sextus* autem numerus progressionis duplæ, duplus est proximè præcedentis, nempe *quinti*.

PROPOSITIO IX.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in quovis numero unitate minuta, dupla est summæ combinationum quæ fieri possunt in numero proximè minori.

Hæc cum præcedente omnino convenit.

Sint duo numeri proximi 4, 5 : dico summam omnium combinationum quæ fieri possunt in 5, nempe 31, unitate minutam, nempe 30, esse duplam omnium combinationum quæ fieri possunt in 4, nempe 15.

Etenim *ex præcedente* summa combinationum quæ fiunt in 5, unitate aucta, dupla est summæ com-

binationum

binationum quæ fiunt in 4, unitate auctæ: si ergo ex *minori* summâ auferatur unitas, & ex *duplâ summâ* auferantur duæ unitates, reliquum summæ *duplæ*, nempe *summa combinationum quæ fiunt in 5 unitate minuta*, remanebit *dupla* residui alterius summæ, nempe *summæ combinationum quæ fiunt in 4*.

PROPOSITIO X.

Summa omnium combinationum quæ fieri possunt in quolibet numero, minuta ipsomet numero, æquatur summæ omnium combinationum quæ fieri possunt in singulis numeris proposito minoribus.

Hæc cum 8 consectatione trianguli arithmetici concurrit quæ sic habet, *basis quælibet unitate minuta, æquatur summæ omnium præcedentium.* Sic autem ostendo.

Sit numerus quilibet 5 : dico summam omnium combinationum quæ possunt fieri in 5, nempe 31 ipso 5 minutam, nempe 26, æquari summæ omnium combinationum quæ possunt fieri in 4, nempe 15; plus summâ omnium quæ possunt fieri in 3, nempe 7; plus summâ omnium quæ possunt fieri in 2, nempe 3; plus eâ quæ potest fieri in 1, nempe 1, quarum aggregatus est 26.

Etenim proprium numerorum hujus progressionis duplæ illud est, ut quilibet ex ipsis, verbi gratiâ, sextus 32, exponente suo minutus, nempe 6, id est 26, æquetur summæ inferiorum numerorum hujus

hujus progressionis, nempe 16 + 8 + 4 + 2 + 1 unitate minutorum, nempe 15 + 7 + 3 + 1 + 0, nempe 26. Unde facilis est demonstratio hujus propositionis.

PROBLEMA PRIMUM.

Dato quovis numero, invenire summam omnium combinationum quæ in ipso fieri possunt. Absque triangulo arithmetico.

Numerus progressionis duplæ quæ ab unitate sumit exordium cujus exponens proximè major est quàm numerus datus, satisfaciet problemati, modò unitate minuatur.

Sit numerus datus, verbi gratiâ, 5, quæritur summa omnium combinationum quæ in 5 fieri possunt.

Numerus *sextus* progressionis duplæ quæ ab unitate incipit, nempe 32, unitate minutus, nempe 31 satisfacit, *ex Lemmate 6*; ergo possunt fieri 31 combinationes in numero 5.

PROBLEMA II.

Datis duobus numeris inæqualibus, invenire quot modis minor in majore combinetur. Absque triangulo arithmetico.

Hoc est propriè ultimum problema Tractatûs Trianguli Arithmetici, quod sic resolvo.

Productus numerorum qui præcedunt differentiam

tiam datorum unitate auctam, dividat productum totidem numerorum continuorum quorum primus ſit minor datorum unitate auctus : quotiens eſt quæſitus.

Sint dati numeri 2, 6 : oportet invenire quot modis 2 combinetur in 6.

Aſſumatur eorum differentia 4 quæ unitate aucta eſt 5. Jam aſſumantur omnes numeri qui præcedunt ipſum 5, nempe 1, 2, 3, 4, quorum productus ſit 24. Aſſumantur totidem numeri continui quorum primus ſit 3, *nempe proximè major quàm* 2 *qui minor eſt ex ambobus datis*, nempe 3, 4, 5, 6, quorum productus 360, dividatur per præcedentem productum 24 : quotiens 15 eſt numerus quæſitus. *Ita ut numerus* 2 *combinetur in* 6, *modis* 15 *differentibus*.

Nec difficilis demonſtratio. Si enim quæratur in triangulo arithmetico quot modis 2 combinetur in 6, aſſumenda eſt cellula 3 baſis 7, *ex Lemmate* 5, nempe cellula ξ, & ipſius numerus exponet multitudinem combinationum numeri 2 in 6. Ut autem inveniatur numerus cellulæ ξ cujus radix eſt 5, & exponens ſeriei 3, oportet, *ex problemate trianguli arithmetici*, *ut productus numerorum qui præcedunt* 5, *dividat productum totidem numerorum continuorum quorum primus ſit* 3, *& quotiens erit numerus cellulæ* ξ; ſed idem diviſor ac idem dividendus in conſtructione hujus propoſitus eſt, quare

&

& eundem quotientem ſortita eſt diviſio; ergo in hac conſtructione repertus eſt numerus cellulæ ξ, quare & exponens multitudinis combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. F. E. D.

MONITUM.

Hoc problemate tractatum hunc abſolvere conſtitueram, non tamen omninò ſine moleſtiâ, cùm multa alia parata habeam; ſed ubi tanta ubertas, vi moderanda eſt fames: his ergo pauca hæc ſubjiciam.

Eruditiſſimus ac mihi chariſſimus, D. D. de Ganieres, circa combinationes, aſſiduo ac perutili labore, more ſuo, incumbens, ac indigens facili conſtructione ad inveniendum quoties numerus datus in alio dato combinetur, hanc ipſe ſibi praxim inſtituit.

Datis numeris, verbi gratiâ, 2, 6, invenire quot modis 2 combinetur in 6.

Aſſumatur, *inquit*, progreſſio *duorum* terminorum *quia minor numerus eſt* 2, inchoando à majore 6, ac retrogrediendo, ſeu detrahendo unitatem ex unoquoque termino, hoc modo 6, 5; deinde aſſumatur altera progreſſio inchoando ab ipſo minore 2 ac ſimiliter retrogrediendo hoc modo 2, 1. Multiplicentur invicem numeri primæ progreſſionis 6, 5, ſitque productus 30. Multiplicentur & numeri ſecundæ progreſſionis 2, 1, ſitque produc-

tus

tus 2. Dividatur major productus per minorem: quotiens est quæsitus.

Excellentem hanc solutionem ipse mihi ostendit, ac etiam demonstrandam proposuit; ipsam ego sanè miratus sum, sed difficultate territus vix opus suscepi, & ipsi authori relinquendum existimavi; attamen trianguli arithmetici auxilio, sic proclivis facta est via.

In 5 Lemmate hujus, ostendi numerum cellulæ ξ, exponere multitudinem combinationum numeri 2 in 6; quare ipsius reciproca cellula K eundem numerum continebit. *Verùm cellula ipsa* K *est quotiens divisionis in quâ productus numerorum* 1, 2, *qui præcedunt* 3 *radicem cellulæ* K, *dividit productum totidem numerorum continuorum quorum primus est* 5 *exponens seriei cellulæ* K, *nempe numerorum* 5, 6. Sed ille divisor ac dividendus sunt iidem ac illi qui in constructione *amici* sunt propositi; igitur eundem quotientem sortitur divisio, quare ipse exponit multitudinem combinationum numeri 2 in 6, quæ quærebatur. Q. E. D.

Hac demonstratione assecutâ, jam reliqua quæ invitus supprimebam libenter omitto, adeò dulce est amicorum memorari.



POTESTATUM



POTESTATUM NUMERICARUM SUMMA.

MONITUM.

DATIS, ab unitate, quotcunque numeris continuis, verbi gratiâ, 1, 2, 3, 4, invenire summam quadratorum eorum, nempe 1 + 4 + 9 + 16, id est 30, tradiderunt veteres; imò etiam & summam cuborum eorundem; ad reliquas verò potestates non protraxerunt ſuas methodos, his ſolummodò gradibus proprias. Hîc autem exhibetur, non ſolùm ſumma quadratorum, & cuborum, ſed & quadrato-quadratorum, & reliquarum in infinitum poteſtatum. Et non ſolùm à radicibus ab unitate continuis, ſed à quolibet numero initium ſumentibus, verbi gratiâ, numerorum 8, 9, 10, &c. Et non ſolùm numerorum qui progreſſione naturali procedunt, ſed & eorum omnium qui progreſſione, verbi gratiâ, cujus differentia eſt 2, aut 3, aut 4, aut alius quilibet numerus, formantur, ut iſtorum 1, 3, 5, 7, &c. vel horum 2, 4, 6, 8, qui per incrementum binarii augentur, aut horum 1, 4, 7, &c. qui per incrementum ternarii, & ſic de cæteris; ſed, *& quod amplius eſt*, à quolibet numero exordium ſumat illa progreſſio, *ſive* incipiat

piat ab unitate, ut isti 1, 4, 7, 10, 13, &c. qui sunt ejus progressionis quæ per incrementum ternarii procedit, & ab unitate sumit exordium; *sivè* ab aliquo hujus progressionis numero incipiat ut isti 7, 10, 13, 16, 19; *sive quod ultimum est*, à numero qui non sit ejus progressionis, ut isti 5, 8, 11, 14, quorum progressio per ternarii differentiam procedit, & à numero 5, *ipsi progressioni extraneo*, exordium sumit. Et *quod sanè feliciter inventum est*, tam multos differentes casus, *unica ac generalissima* resolvit *methodus*; adeò *simplex*, ut absque litterarum auxilio, quibus difficiliores egent enuntiationes, paucis lineis contineatur: ut ad finem problematis sequentis patebit.

DEFINITIO.

Si binomium, cujus alterum nomen sit A, alterum verò numerus quilibet ut 3, nempe $A + 3$, ad quamlibet constituatur potestatem ut ad quartum gradum, cujus hæc sit expositio . . . . .

$$A^4 + 12.A^3 + 54.A^2 + 108.A + 81:$$

Ipsi numeri 12, 54, 108, per quos ipse A multiplicatur in singulis gradibus, quique partim ex numeris figuratis, partim ex numero 3, qui binomii est secundum nomen, formantur, vocabuntur *coefficientes* ipsius A.

Erit ergo *in hoc exemplo* 12 *coefficiens* A cubi, & 54 *coefficiens* A quadrati, & 108 *coefficiens* A *radicis*.

Numerus verò 81 *numerus absolutus* dicetur.

LEMMA.

Sit radix quælibet 14; altera verò ſit binomium 14 + 3 cujus primum nomen ſit 14, alterum verò alius quilibet numerus 3, ita ut harum radicum 14, & 14 + 3, differentia ſit 3. Conſtituantur ipſæ in quolibet gradu ut in quarto: ergo quartus gradus radicis 14 eſt 14^4; quartus verò gradus binomii 14 + 3 eſt . . . .

$$14^4 + 12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81.$$

Cujus quidem binomii primum nomen 14, *eoſdem coefficientes ſortitur in ſingulis gradibus, quos* A *ſortitus eſt in ſimilibus gradibus in expoſitione ejuſdem gradûs binomii* A + 3, *quod rationi conſentaneum eſt;* harum verò poteſtatum, nempe hujus 14^4 & hujus $14^4 + 12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$, differentia eſt $12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$: quæ quidem conſtat primò, ex radice 14 conſtitutâ in ſingulis gradibus propoſito gradui *quarto* inferioribus, nempe in *tertio*, in *ſecundo* & in *primo*, & in unoquoque multiplicatâ per *coefficientes* quos *A* ſortitur in ſimilibus gradibus, in expoſitione ejuſdem gradûs binomii *A* + 3; deinde ex ipſo numero 3, *qui eſt differentia radicum*, conſtituto in propoſito *quarto* gradu, *numerus enim abſolutus* 81 *eſt quartus gradus radicis* 3. Hinc igitur elicietur *Canon iſte:*

Duarum

Duarum similium potestatum differentia, æquatur, differentiæ radicum constitutæ in eodem gradu in quo sunt potestates propositæ; plus *minori radice constitutâ in singulis gradibus proposito gradui inferioribus ac in unoquoque multiplicatâ per coefficientes quos* A *sortiretur in similibus gradibus; si binomium cujus primum nomen esset* A, *alterum verò esset differentia radicum, constitueretur in eâdem potestate propositâ.*

Sic ergo differentia inter 14^4 & 11^4, erit... $12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81$.

Differentia enim radicum est 3. Et sic de cæteris.

Ad summam potestatum cujuslibet progressionis inveniendam unica ac generalis methodus.

Datis quotcunque numeris, in qualibet progressione, à quovis numero inchoante, invenire quarumvis potestatum eorum summam?

Quilibet numerus 5, sit initium progressionis quæ per incrementum cujusvis numeri, verbi gratiâ, *ternarii* procedat, & in eâ progressione dati sint quotlibet numeri, verbi gratiâ, isti 5, 8, 11, 14, qui omnes in quâcunque potestate constituantur ut in tertio gradu seu cubo. Oportet invenire summam horum cuborum, nempe $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$.

Cubi illi sunt 125 + 512 + 1331 + 2744, quo-

rum ſumma eſt 4712 quæ quæritur & ſic invenitur.

Exponatur binomium $A + 3$ cujus primum nomen ſit A, alterum verò ſit numerus 3 qui eſt differentia progreſſionis.

Conſtituatur binomium hoc $A + 3$ in gradu *quarto* qui proximè ſuperior eſt propoſito *tertio*, ſitque hæc ejus expoſitio . . . .

$$A^4 + 12 . A^3 + 54 . A^2 + 108 . A + 81.$$

Jam aſſumatur numerus 17 qui in progreſſione propoſitâ proximè ſequitur ultimum progreſſionis terminum datum 14. Et conſtituto ipſo 17 in eodem gradu *quarto*, nempe 83521, auferantur ab eo, hæc:

Primò, ſumma numerorum propoſitorum 5 + 8 + 11 + 14, nempe 38 multiplicata per numerum 108, qui eſt coefficiens ipſius A radicis.

Secundò, ſumma quadratorum eorundem numerorum 5, 8, 11, 14, multiplicata per numerum 54, qui eſt coefficiens A quadrati.

Et ſic deinceps procedendum eſſet ſi ſupereſſent gradus alii inferiores ipſi gradui tertio qui propoſitus eſt.

Deinde *auferatur* primus terminus *propoſitus* 5 *in* quarto *gradu conſtitutus*.

Denique *auferatur* numerus 3 qui eſt differentia progreſſionis *in eodem gradu* quarto *conſtitutus*, *ac* toties *ſumptus*, quot *ſunt numeri propoſiti*, *nempe* quater *in hoc exemplo*.

Reſiduum erit multiplex ſummæ quæſitæ, eamque

que *toties* continebit, *quoties* numerus 12 qui est coefficiens ipsius *A* cubi, seu *A* in gradu *tertio* proposito, continet unitatem.

Si ergo ad *praxim* methodus reducatur, numerus 17 constituendus est in 4 gradu, nempe 83521, & ab eo hæc auferenda sunt:

Primò, summa numerorum propositorum $5 + 8 + 11 + 14$, nempe 38, multiplicata per 108, unde oritur productus 4104.

Deinde summa quadratorum numerorum propositorum, id est, $5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$, nempe $25 + 64 + 121 + 196$, quorum summa est 406, quæ multiplicata per 54 efficit 21924.

Deinceps auferendus est numerus 5 in *quarto* gradu, nempe 625.

Denique auferendus est numerus 3 in *quarto* gradu, nempe 81, *quater* sumptus, nempe 324. Numeri ergo auferendi, illi sunt 4104, 21924, 625, 324; quorum summa est 26977, quæ ablata à numero 83521, superest 56544.

Hoc ergo *residuum* continebit summam quæsitam, nempe 4712, multiplicatam per 12; & profectò 4712 per 12 multiplicata efficit 56544.

Paradigma facilè est construere; hoc autem sic demonstrabitur.

Etenim numerus 17 in 4 gradu constitutus qui quidem sic exprimitur 17^4 æquatur $17^4 - 14^4. + 14^4 - 11^4. + 11^4 - 8^4. + 8^4 - 5^4 + 5^4.$

Solus enim 17^4 signum affirmationis solum sortitur, reliqui autem affirmantur ac negantur.

Sed differentia radicum 17, 14, est 3, eademque est differentia radicum 14, 11, eademque radicum 11, 8, ac etiam radicum 8, 5. Igitur ex præmisso Lemmate:

$17^4 - 14^4$ æquatur $12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$.
Sic $14^4 - 11^4$ æquatur $12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81$.
Sic $11^4 - 8^4$ æquatur $12.8^3 + 54.8^2 + 108.8 + 81$.
Sic $8^4 - 5^4$ æquatur $12.5^3 + 54.5^2 + 108.5 + 81$.

Non interpretor 5^4.

Igitur 17^4 æquatur his omnibus:

$12.14^3 + 54.14^2 + 108.14 + 81$
$+ 12.11^3 + 54.11^2 + 108.11 + 81$
$+ 12.8^3 + 54.8^2 + 108.8 + 81$
$+ 12.5^3 + 54.5^2 + 108.5 + 81$
$+ 5^4$.

Hoc est *mutato ordine*, 17^4 æquatur his
$5 + 8 + 11 + 14$ multiplicatis per 108;
$+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$ multiplicatis per 54;
$+ 5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12;
$+ 81 + 81 + 81 + 81$;
$+ 5^4$.

Ablatis undique his
$5 + 8 + 11 + 14$ multiplicatis per 108;
$+ 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2$ multiplicatis per 54;
$+ 81 + 81 + 81 + 81$;
$+ 5^4$;

Remanet

Remanet 17^4 minus his, nempe . . . .
$-5 - 8 - 11 - 14$ multiplicatis per 108;
$-5^2 - 8^2 - 11^2 - 14^2$ multiplicatis per 54;
$-81 - 81 - 81 - 81$;
-5^4;
æqualis $5^3 + 8^3 + 11^3 + 14^3$ multiplicatis per 12.
Q. E. D.

Sic ergo poteſt inſtitui enuntiatio & generalis conſtructio.

SUMMA POTESTATUM.

Datis quotcunque numeris, in quâlibet progreſſione, à quovis numero initium ſumente, invenire ſummam quarumvis poteſtatum eorum?

Exponatur binomium, cujus primum nomen ſit *A*, alterum verò ſit numerus qui differentia progreſſionis eſt, & conſtituatur hoc binomium in *gradu qui proximè ſuperior* eſt gradui propoſito, & in expoſitione poteſtatis ejus notentur *coefficientes* quos *A* ſortitur in ſingulis gradibus.

Conſtituatur & in eodem *gradu ſuperiori numerus qui* in eâdem progreſſione propoſitâ *proximè ſequitur ultimum* progreſſionis terminum propoſitum. Et ab eo *auferantur* hæc:

Primò, primus terminus *progreſſionis datus, ſeu minimus numerus datorum in eodem* ſuperiori gradu *conſtitutus*.

Secundò, *numerus qui* differentia eſt progreſſionis

in eodem ſuperiori gradu *conſtitutus, ac* toties *ſumptus* quot *ſunt termini dati.*

Tertiò, *auferantur* ſinguli numeri *dati, in* ſingulis gradibus *propoſito gradui* inferioribus *conſtituti, ac in unoquoque gradu multiplicati per* jam notatos coefficientes *quos* A *ſortitur in iiſdem gradibus in expoſitione hujus* ſuperioris *gradûs binomii primò aſſumpti.*

Reliquum *eſt multiplex ſummæ quæſitæ, eamque* toties *continet* quoties coefficiens *quem* A *in gradu* propoſito *ſortitur continet unitatem.*

MONITUM.

Praxes jam particulares ſibi quiſque pro genio ſuppeditabit : verbi gratiâ, ſi quæris ſummam quotlibet numerorum progreſſionis naturalis à quolibet inchoantis, hic, ex methodo generali, elicietur *Canon :*

In progreſſione naturali à quovis numero inchoante, differentia inter quadratum minimi termini & quadratum numeri qui proximè major eſt ultimo termino, minuta numero qui exponit multitudinem, dupla eſt aggregati ex omnibus.

Sint quotlibet numeri naturali progreſſione continui, quorum primus ſit ad libitum, verbi gratiâ, *quatuor* iſti 5, 6, 7, 8 : dico $9^2 - 5^2 - 4$ æquari duplo $5 + 6 + 7 + 8$.

Similes canones & reliquarum poteſtatum ſummis

mis inveniendis & reliquis progreſſionibus facilè aptabuntur, quos quiſque ſibi comparet.

CONCLUSIO.

Quantùm hæc notitia ad ſpatiorum curvilineorum dimenſiones conferat, ſatis norunt qui in Indiviſibilium doctrinâ tantiſper verſati ſunt. Omnes enim omnium generum Parabolæ illicò quadrantur, & alia innumera facillimè menſurantur.

Si ergo illa, quæ hac methodo in numeris reperimus, ad quantitatem continuam applicare libet, hi poſſunt inſtitui canones.

Canones ad naturalem progreſſionem quæ ab unitate ſumit exordium.

Summa linearum eſt ad quadratum maximæ, ut . . . . 1 ad 2.

Summa quadratorum eſt ad cubum maximæ, ut . . . . 1 ad 3.

Summa cuborum eſt ad 4 gradum maximæ, ut . . . . 1 ad 4.

Canon generalis ad progreſſionem naturalem quæ ab unitate ſumit exordium.

Summa omnium in quolibet gradu, eſt ad maximam in proximè ſuperiori gradu, ut unitas, ad exponentem ſuperioris gradûs.

Non de reliquis diſſeram, quia hîc locus non eſt:

hæc

hæc obiter notavi, reliqua facili negotio penetrantur, eo posito principio, *in continuâ quantitate, quotlibet quantitates cujusvis generis quantitati superioris generis additas, nihil ei superaddere.* Sic puncta lineis, lineæ superficiebus, superficies solidis, nihil adjiciunt: seu *ut numericis, in numerico tractatu, verbis utar,* radices quadratis, quadrata cubis, cubi quadrato-quadratis, &c. nihil apponunt. Quare, inferiores gradus nullius valoris existentes, non considerandi sunt. Hæc, quæ Indivisibilium studiosis familiaria sunt, subjungere placuit, ut nunquam satis mirata connexio, quâ ea etiam quæ remotissima videntur, in unum addicat unitatis amatrix natura, ex hoc exemplo prodeat, in quo, *quantitatis continuæ dimensionem, cum numericarum potestatum summâ,* conjunctam contemplari licet.





DE NUMERIS *MULTIPLICIBUS* Ex solâ characterum numericorum additione agnoscendis.

Monitum.

NIHIL tritius est apud Arithmeticos, quàm numeros numeri 9 multiplices, constare characteribus, quorum aggregatum est quoque ipsius 9 multiplex. Si enim ipsius, verbi gratiâ, dupli 18, characteres numericos 1 + 8, jungas, aggregatum erit 9. Ita ut ex solâ additione characterum numericorum numeri cujuslibet, liceat agnoscere, utrùm sit ipsius 9 multiplex: verbi gratiâ, si numeri 1719 characteres numericos jungas 1 + 7 + 1 + 9, aggregatum 18 est ipsius 9 multiplex; undè certò colligitur, & ipsum 1719 ejusdem 9 esse multiplicem. Vulgata sanè illa observatio est; verùm ejus demonstratio à nemine quod sciam data est, nec ipsa notio ulteriùs provecta. In hoc autem Tractatulo non solùm istius, sed & variarum aliarum observationum generalissimam demonstrationem dedi, ac methodum universalem agnoscendi ex solâ additione characterum numericorum propositi

cujusvis

cujusvis numeri, utrùm ille sit alterius propositi numeri multiplex; & non solùm in progressione denariâ, quâ numeratio nostra procedit (denaria enim ex instituto hominum, non ex necessitate naturæ ut vulgus arbitratur, & sanè satis ineptè, posita est); sed in quâcunque progressione instituatur numeratio, non fallet hîc tradita methodus, ut in paucis mox videbitur paginis.

Propositio unica.

Agnoscere ex solâ additione characterum dati cujuslibet numeri, an ipse sit alterius dati numeri multiplex?

Ut hæc solutio fiat generalis, litteris utemur vice numerorum. Sit ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram *A*; dividendus autem, numerus expressus per litteras *T V N M*, quarum ultima *M* exprimit numerum quemlibet in unitatum columnâ collocatum; *N* verò, numerum quemlibet in denariorum columnâ; *V* numerum quemlibet in columnâ centenariorum; *T* autem numerum quemlibet in columnâ millenariorum, & sic deinceps in infinitum: ita ut, si litteras in numeros convertere velis, assumere possis loco ipsius *M* quemlibet ex novem primis characteribus, verbi gratiâ, 4, loco *N* quemlibet numerum, ut 3, loco *V* quemlibet numerum, ut 5; & loco *T*, quemlibet numerum, ut 6; & collocando singulos illos characteres numericos in

propriâ

propriâ columnâ, prout collocatæ ſunt litteræ quæ illos exprimunt, proveniet hic numerus 6 5 3 4, diviſor autem *A* erit numerus quilibet, ut 7. Miſſis autem peculiaribus his exemplis generali iſtâ enunciatione omnia amplectimur.

Dato quocumque dividendo *T V N M*, & quocumque diviſore *A*, agnoſcere ex ſolâ additione characterum numericorum *T V N M*, utrùm ipſe numerus *T V N M* exactè dividatur per ipſum numerum *A*?

Ponantur ſeorſim numeri ſerie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, & cæteri à dextrâ ad ſiniſtram ſic . . . . . .

&c. 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
&c. *K I H G F E D C B* 1.

Jam ipſi primo numero 1, ſubſcribatur unitas.

Ex ipsâ unitate *decies* ſumptâ, ſeu ex 10 auferatur *A* quoties fieri poterit, & ſuperſit *B* qui ſub 2 ſubſcribatur.

Ex *B decies* ſumpto ſeu ex 10 *B*, auferatur *A* quoties poterit, & ſuperſit *C* qui ipſi 3 ſubſcribatur.

Ex 10 *C*, auferatur *A* quoties poterit, & ſuperſit *D* qui ipſi 4 ſubſcribatur.

Ex 10 *D*, auferatur *A*, &c. in continuum.

Nunc ſumatur ultimus character dividendi *M*, qui quidem & primus eſt à dextrâ ad ſiniſtram, ſcribaturque ſeorſim ſemel; *primo enim numero* 1, *ſubjacet unitas.*

M
N in *B*
V in *C*
T in *D*

Jam

Jam ſumatur ſecundus character *N*, & toties repetatur quot ſunt unitates in *B*, *qui ſecundo numero ſubjacet*, hoc eſt multiplicetur *N* per *B*, & ſub *M* ponatur productus.

Jam ſumatur tertius character *V*, & toties repetatur quot ſunt unitates in *C*, *ſub tertio numero ſubjecto*, ſeu multiplicetur *V* per *C*, & productus ſub primis ponatur.

Sic denique multiplicetur quartus *T* per *D*, & ſub aliis ſcribatur. Et ſic in infinitum.

Dico prout ſumma horum numerorum $M+N$ in $B+V$ in $C+T$ in D, eſt ipſius *A* multiplex aut non, & quoque ipſum numerum *TVNM* eſſe ejuſdem multiplicem, vel non.

Etenim ſi propoſitus dividendus *unicum* haberet characterem *M*, ſanè prout ipſe eſſet multiplex ipſius *A*, numerus quoque *M* eſſet ejuſdem *A* multiplex, cùm ſit ipſe numerus totus.

Si verò conſtet *duobus* characteribus *NM*: dico quoque, prout $M+N$ in *B*, eſt multiplex *A*, & ipſum numerum *NM* ejuſdem multiplicem eſſe.

Etenim character *N* in columnâ denarii, æquatur 10 *N*.

Verùm ex conſtructione, eſt . . . . $10 - B$ multiplex *A*.
Quare ducendo $10 - B$ in *N* eſt $10\,N - B$ in *N* multiplex *A*.
Si ergo contingit & eſſe . . . $M + B$ in *N* multiplicem *A*,
Ergo ambo ultimi multiplices juncti $10\,N + M$ erunt mult. *A*.
Id eſt *N* in columnâ denarii & *M* in
columnâ unitatis, ſeu numerus . . . *NM* eſt multiplex *A*.
Q. E. D.

Si

Si numerus dividendus conſtet *tribus* characteribus VNM: dico quoque ipſum eſſe aut non eſſe multiplicem A, prout $M+N$ in $B+V$ in C, erit ipſius A multiplex, vel non.

Etenim character V, in columnâ centenarii, æquatur 100 V.

At ex conſtructione eſt . . . . . 10—B, multiplex A.
Quare multiplicando 10—B per 10 . . . 100—10 B, mult. A.
Et ducendo ipſos in V . . . 100 V—10 B in V, mult. A.
Sed eſt etiam ex conſtructione . . . . 10 B—C, mult. A.
Quare ducendo in V . . . 10 B in V—C in V, mult. A.
Sed ex oſtenſis . . . . . . 100 V—10 B in V, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi . . . . 100 V—C in V, mult. A.
Jam verò oſtendemus ut in ſecundo caſu 10 N—B in N, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi, 100 V+10 N—C in V—B in N, mult. A.
Ergo ſi contingat hos numeros C in V+B in N+M, eſſe mult. A,
ambo ultimi juncti, nempe 100 V+10 N+M, eſt mult. A.

Seu V, in columnâ centenarii, N denarii & M unitatis, hoc eſt numerus VNM, eſt multiplex A. Q. E. D.

Non ſecus demonſtrabitur de numeris ex *pluribus* characteribus compoſitis. Quare prout, &c. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus.

Quæro, qui ſint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis 1, 2, 3, 4, 5, &c. ſubſcribo 1 ſub 1 . . . .

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Ex unitate decies ſumptâ, ſeu ex 10 auſero 7 quoties poteſt, ſupereſt 3 quem pono ſub 2.

Ex 3 decies ſumpto, ſeu ex 30 auſero 7 quoties poteſt, ſupereſt 2 quem pono ſub 3.

Ex

Ex 20 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 6 & pono ſub 4.
Ex 60 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 4 & pono ſub 5.
Ex 40 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 5 & pono ſub 6.
Ex 50 aufero 7 quoties poteſt, ſupereſt 1 & pono ſub 7.
Ex 10 aufero 7 quoties poteſt, & redit 3 & pono ſub 8.
Ex 30 aufero 7 quoties poteſt, & redit 2 & pono ſub 9.

Et ſic redit ſeries numerorum 1, 3, 2, 6, 4, 5, in infinitum.

Jam proponatur numerus quilibet 287542178, de quo quæritur utrùm exactè dividatur per 7; hoc ſic agnoſcetur.

Sumatur *ſemel* ejus character qui primus eſt à dextrâ ad ſiniſtram, nempe 8, *primo enim numero ſeriei continuæ ſubjacet unitas*, quare ponatur ille 8, primus character *ſemel* . . . . . 8.

Secundus, qui eſt 7, *ter* ſumatur, ſeu per 3 multiplicetur, *ſecundo enim numero ſeriei ſubjacet* 3, ſitque productus . . . . 21.

Tertius *bis* ſumatur, *ſubjacet enim 2 ipſi* 3, quare tertius character qui eſt 1, per 2 multiplicatus ſit . . . . 2.

Quartus eâdem ratione per 6 multiplicatus 12.
Quintus per 4 multiplicatus . . . . . 16.
Sextus per 5 multiplicatus . . . . . 25.
Septimus *ſemel*, *ſeptimo enim ſubjacet* 1, 7.
Octavus ter ſumptus . . . . 24.
Nonus bis ſumptus . . . . 4.

Et ſic deinceps ſi ſupereſſent. Jungantur hi numeri . . . . 119.

Si

Si ipse aggregatus 119 est multiplex ipsius 7, numerus quoque propositus 287542178, ejusdem 7 multiplex erit.

Potest autem dignosci eâdem methodo, utrùm ipse 119, sit multiplex 7, scilicet sumendo semel primum characterem 9
secundum characterem ter 3
& præcedentem bis 2

14

Si enim summa 14 est multiplex 7, erit & 119 ejusdem multiplex.

Sed & si curiositate potiùs quàm necessitate moti, velimus agnoscere utrùm 14 sit multiplex 7, sumatur character ultimus semel 4
& præcedens ter 3

7

Si summa est multiplex ipsius 7, erit & 14 multiplex 7, quare & 14, & 119, & 287542178.

Vis agnoscere quinam numeri dividantur per 6? Scriptis, ut sæpiùs dictum est, numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, &c., & 1 sub 1 posito . . .

&c. 4 3 2 1
&c. 4 4 4 1

Ex 10 aufer 6, reliquum 4 sub 2 ponito.
Ex 40 aufer 6, reliquum 4 sub 3 ponito.
Ex 40 aufer 6, reliquum 4 sub 4 ponito.

Et ſic ſemper redibit 4, quod agnoſci potuit ubi ſemel rediit.

Ergo, ſi proponatur numerus quilibet, de quo quærebatur utrùm ſit dividendus per 6, nempe 248742? ſume ultimam ejus figuram ſemel . . 2
præcedentem quater 16
præcedentem quater, &c. 28
& uno verbo, primam ſemel, reliquarum verò 32
ſummam quater 16
8
102

Si ſumma 102 dividatur per 6, dividetur & ipſe numerus propoſitus 248742 per eumdem 6.

Vis agnoſcere utrùm numerus dividatur per 3? Scriptis ut priùs numeris naturalibus, & 1 ſub 1 poſito . . . .

5 4 3 2 1
1 1 1 1 1

Ex 10 aufer 3 quoties poteſt, reliquum 1 ſub 2 ponito. Ex 10 aufer 3 quantùm poteſt, reliquum 1 ſub 3 ponito, & ſic in infinitum.

Ergo ſi proponatur numerus quilibet 2451, ut ſcias utrùm dividatur per 3,
ſume ſemel ultimam figuram 1
præcedentem ſemel 5
& ſemel ſingulas 4
2
12

Si

Si summa dividatur per 3, dividetur & numerus propositus per 3.

Vis agnoscere utrùm numerus dividatur per 9? Scriptis numeris 1, 2, 3, &c., & 1 sub 1 posito.

Ex 10 aufer 9, & quoniam superest 1, patet *unitatem* contingere singulis numeris. Ergo, si numeri propositi singuli characteres simul sumpti dividantur per 9, dividetur & ipse.

Vis agnoscere utrùm numerus dividatur per 4? Scriptis numeris naturalibus, ut mos est, & posito 1 sub 1 . . . .

4 3 2 1
0 0 2 1

Ex 10 aufer 4 quantùm potest, reliquum 2 pone sub 2.
Ex 20 aufer 4 quantùm potest, reliquum 0 pone sub 3.
Ex 00 aufer 4, superest semper 0.
Quare si proponatur numerus dividendus 2486, pono ultimum characterem semel 6
præcedentem bis, *subjacet enim 2 sub 2* . . 16

22

Præcedens per 0 multiplicatus facit zero & sic de reliquis; quare ad ipsos non attendito; & si summa priorum, nempe 22, per 4 dividatur, dividetur & ipse, secùs autem, non.

Sic numeri quorum ultimus character semel, præcedens bis, præcedens quater, (*reliquis neglectis*,

zero enim sortiuntur) simul juncti numerum efficiunt multiplicem 8, sunt ipsi & ejusdem 8 multiplices, secùs autem, non.

In exemplum autem dabimus & illud.

Agnoscere qui numeri dividantur per 16? Scriptis, ut dictum est, numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., & 1 sub 1 posito . . . . .

7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	8	4	10	1

Ex 10 aufer 16 quantùm potest, superest ipse 10. *Ex minore enim numero major numerus subtrahi non potest; quare ipsemet numerus* 10 *ponatur sub* 2.

Ex ipso 10 decies sumpto, ut mos est, seu ex 100, aufero 16 quantùm potest; superest 4 quem pono sub 3.

Ex 40 aufero 16 quantùm potest, reliquum 8 pono sub 4.

Ex 80 aufero 16 quantùm potest, superest 0.

Ideò omnis numerus cujus ultimus character semel sumptus, penultimus decies, præcedens quater, & præcedens octies, efficiunt numerum multiplicem 16, erit & ipse ipsius 16 multiplex.

Sic reperies omnes numeros, quorum penultimus character decies, reliqui autem omnes, scilicet ultimus, ante penultimus, præante penultimus, & reliqui semel sumpti, efficiunt numerum divisibilem per 45, vel 18, vel 15, vel 30, vel

90,

90, & uno verbo omnes divisores numeri 90, duobus constantes characteribus, dividi quoque & ipsos per hos divisores.

Non difficilis indè ad alia progressus; sed intentatam huc usque materiam aperuisse, & satis obscuram lucidissimâ demonstratione illustravisse, sufficit. Ars etenim illa, quâ ex additione characterum numeri, noscitur per quos sit divisibilis, ex imâ numerorum naturâ, & ex eorum denariâ progressione vim suam sortitur: si enim aliâ progressione procederent, verbi gratiâ, duodenariâ (quod sanè gratum foret) & sic ultra primas novem figuras, aliæ duæ institutæ essent, quarum altera denarium, altera undenarium exhiberet; tunc non ampliùs contingeret, numeros quorum omnes characteres simul sumpti efficiunt numerum multiplicem 9, esse & ipsos ejusdem 9 multiplices.

Sed methodus nostra, necnon & demonstratio, & huic progressioni, & omnibus possibilibus convenit.

Si enim in hac duodenariâ progressione, proponitur agnoscere an numerus dividatur per 9.

Instituemus, ut antea, numeros naturali serie continuos 1, 2, 3, 4, 5, &c., & 1 sub 1 posito

4 3 2 1
0 0 3 1

Ex unitate jam duodecies sumptâ seu ex 10,

(qui jam poteſt *duodecim*, non autem *decem*) auferendo 9 quantùm poteſt, ſupereſt 3, quem pono ſub 2.

Ex 30 (qui jam poteſt *triginta ſex*, ſcilicet *ter duodecim*) aufer 9 quantùm poteſt, & ſupereſt nihil, continetur enim 9 quater exactè in *triginta ſex*; pono igitur 0 ſub 3.

Et ideò, zero ſub reliquis characteribus continget.

Undè colligo, omnes numeros, quorum ultimus character ſemel ſumptus, penultimus verò ter (*de cæteris non curo quales ſint, zero enim ſortiuntur*) efficiunt numerum diviſibilem per 9, dividi quoque per 9, in duodenariâ progreſſione.

Sic in hac progreſſione duodenariâ omnes numeri quorum ſinguli characteres ſimul ſumpti efficiunt numerum diviſibilem per 11, ſunt & diviſibiles per eumdem.

In noſtrâ verò progreſſione denariâ, contingit omnes numeros diviſibiles per 11, ita ſe habere, ut ultimus ſemel ſumptus, penultimus decies, præcedens ſemel, præcedens decies, præcedens ſemel, præcedens decies, & ſic in infinitum, conflare numerum multiplicem 11.

Hæc & alia facili ſtudio, ex iſtâ methodo quiſque colliget; tetigimus quidem quoniam intentata placent, relinquimus verò ne nimia perſcrutatio tædium pariat.

PROBLEMATA



PROBLEMATA DE CYCLOIDE,

Proposita mense Junii 1658.

CUM ab aliquot mensibus, quædam circa Cycloidem (1), ejusque centra gravitatis, meditaremur, in propositiones satis arduas ac difficiles, ut nobis visum est, incidimus, quarum solutionem à præstantissimis toto orbe Geometris supplices postulamus, proposito ipsis præmio, non mercedis gratiâ (quod absit!) sed in obsequii nostri, aut potiùs meriti eorum qui hæc invenerint, publicum argumentum.

Quæ verò proponimus sunt ejus modi. Dato puncto quolibet *Z* (*Fig.* 1.) in quacunque Cycloide *ABCD*, ex quo ducta sit *ZY* basi *AD* parallela quæ axem *CF* secet in puncto *Y*; quæruntur: Fig. 1.

Dimensio spatii *CZY*, ejusdemque centrum gravitatis; solida genita ex circumvolutione dicti spatii *CZY*, tam circa *ZY* quàm circa *CY*; & horum solidorum centra gravitatis.

Quòd si eadem solida, plano per axem ducto secentur, & sic fiant utrinque duo solida, duo sci-

(1) Cycloidis definitio ad finem hujus scripti habetur.

licet ex ſolido circa baſim *ZY*, & duo ex ſolido circa axem *CY* genito, cujuſque horum ſolidorum quærimus etiam centra gravitatis.

Quia verò quæſitorum demonſtratio forſan adeò prolixa evadet, ut vix intra præſtitutum tempus exequi ſatis commodè poſſit, genio & otio doctiſſimorum Geometrarum conſulentes, ab his tantùm poſtulamus, ut demonſtrent, vel more antiquorum, vel certè per doctrinam Indiviſibilium (hanc enim demonſtandi viam amplectimur) omnia quæ quæſita ſunt, data eſſe: ita ut facilè ex demonſtratis, quælibet puncta quæſita ex datis in hypotheſibus, poſſint inveniri.

Et ut apertiùs mentem meam explicem, nec ſubſit aliquid ambiguum, exemplo rem illuſtro. Proponatur, verbi gratiâ, parabola *ABC* (*Fig.* 2.) cujus axis *AB*, baſis *AC*, tangens *BD*, parallela axi *CD*. Inveniendum ſit centrum gravitatis trilinei *DCB*. Satis factum eſſe problemati cenſerem, ſi demonſtretur, datum eſſe centrum gravitatis parabolæ *ABC*, nec non & centrum gravitatis rectanguli *CDBA*, & proportionem hujus rectanguli cum parabolâ *CBA*, ideòque datum eſſe centrum gravitatis quæſitum trilinei *CDB*. Nam etſi præcisè punctum in quo reperitur centrum gravitatis non exhibeatur, demonſtratum tamen eſt datum eſſe, cùm ea ex quibus invenitur data ſint; reſque eò deducta erit ut nihil aliud ſuperſit præter calculum,

Fig. 2.

calculum, in quo nec vis ingenii nec peritia artificis requiruntur : ideòque non is à nobis calculus exigitur, cur enim in iis immoraremur ? Sed tantummodò petimus demonstrari res quæ proponuntur datas esse.

Verùm doctissimi Geometræ prorsus necessarium judicabunt, & ab his postulamus, duarum propositionum, vel duorum casuum integram constructionem, seu integrum calculum.

Primus casus est cùm punctum *Z* constituitur in *A*.

Secundus, cùm idem punctum *Z* datur in *B*, in quo transit parallela *GB* ducta à puncto *G* centro circuli genitoris Cycloidis.

Quòd si aliquis error calculi in his duobus casibus subrepserit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipsi peteremus facilè promerebuntur.

Quisquis superiùs proposita, intra primam diem mensis Octobris anni 1658, solverit & demonstraverit, magnus erit nobis Apollo.

Et primus quidem consequetur valorem quadraginta duplorum aureorum Hispanicorum quos ipsi Hispani *doblones*, & Galli *pistoles* vocant; vel certè, si mavult, ipsos duplos aureos.

Secundus verò viginti ejusmodi duplos aureos. Si unus tantùm solverit, sexaginta solus habebit.

Et quia seriò rem agimus, dictos sexaginta duplos aureos Illustrissimo Domino de Carcavi, Re-

gio Consiliario Parisiis commoranti, apud Celsissimum Dominum Ducem de Liancourt deponi curavimus, qui eos exsolvet statim ac demonstrationes quæ ad ipsum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipso ad id deputatis, judicabuntur. Et cùm Illustrissimum Consiliarium, jam à multis annis virum probum, & Matheseos amantissimum agnoverimus, audacter pollicemur rem sincerè & absque fallaciâ exequendam.

Quòd si his circiter tribus elapsis mensibus nullus inveniatur qui quæsita nostra solverit, non denegabimus quæ ipsi invenimus, nec aliis invidebimus undè majora jam inventis nanciscantur, & ex quibus forsan apud posteros gratiam inibimus.

Hoc unum restat ut lineæ Cycloidis descriptionem exhibeamus, à quâ brevitatis causâ abstinendum arbitrabamur, cùm hæc linea jam pridem Galileo, Toricellio, & aliis innotuerit; sed quia eorum Libri omnibus non sunt obnoxii, ideò hanc ex Toricellio damus.

DESCRIPTIO CYCLOIDIS.

Concipiatur super manente rectâ lineâ *DA*, circulus *DL*, contingens rectam *DA*, in puncto *D*, noteturque punctum *D*, tanquam fixum in peripheriâ circuli *DL*: tùm intelligatur super manente rectâ *DA* converti circulum *DL* motu circulari simul & progressivo versus partes *A*, ita ut

subindè

ſubindè aliquo ſui puncto rectam lineam *D A* ſemper contingat, quouſque fixum punctum *D* iterùm ad contactum revertatur, putâ in *A*. Certum eſt quòd punctum *D* fixum in peripheriâ circuli rotantis *D L*, aliquam lineam deſcribet, ſurgentem primò à ſubjectâ lineâ *D A*, deindè culminantem verſus *C*, poſtremò pronam deſcendentemque verſus punctum *A*: & talis linea vocata eſt Cyclois (1).

DE EODEM ARGUMENTO
ADDITAMENTUM.

CUM circà ea quæ de Cycloide propoſuimus, duo orta eſſe dubia, nobis Illuſtriſſimus DD. de Carcavi ſignificaverit, his ſtatim occurrendum duximus, & ita occurrimus.

Prius indè oritur, quòd in proponendis noſtris de Cycloide problematis hâc voce uſi fuerimus, *in quacunque Cycloide*: cùm tamen unius tantùm ſpeciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verùm

---

(1) Dans l'Exemplaire qui appartient à la Bibliotheque du Roi, on trouve, à la fin de ce Programme, les mots ſuivants écrits de la main de Paſcal : *Centrum curvæ* A Z C *diſtat à baſi duabus tertiis partibus axis, & diſtat ab axe, rectâ æquali uni tertiæ parti axis, plus differentiâ inter baſim & axem.*

nihil

nihil aliud intelleximus præter ſolam illam ſimplicem, naturalem ac primariam Cycloidem cujus ex Toricellio deſcriptionem dedimus; cùm enim quæ de illâ reſolvuntur facile ſit, ad omnes alias ſpecies protrahere, qui noſtra problemata de hâc ſolâ ſolverit, nobis omninò ſatisfecerit.

Poſterius in eo conſiſtit, quòd à nobis non ſit præcisè poſitum an ſupponamus datam eſſe rationem baſis Cycloidis *AD* (*Fig.* 1.) cum ſuâ altitudine, ſeu cum diametro circuli genitoris *FC*; ſed ipſam datam eſſe rationem pro conceſſo uſurpandum arbitrabamur, & ut omninò æquum eſt, datam eſſe ſupponimus.

Fig. 1.

Nihil ergò jam ſupereſt obſcuritatis. Unum tamen reſtare videtur, ut doctiſſimos Geometras ad propoſitiones noſtras commodiùs & libentiùs inveſtigandas invitemus; ſcilicet ea omnia removere quæ à perſpicacitate ingenii, quam ſolam magni facimus, & explorare ac coronare inſtituimus, ſunt aliena, qualia ſunt tàm calculus integer multorum caſuum quem poſtulabamus, quàm abſoluta ſolutionum conſcriptio; cùm ea non à viribus ingenii, ſed ab aliis circumſtantiis pendeant. Hoc itaque tantummodò jam inſtituimus, ut ſola problematum difficultas remaneat ſuperanda. Nempè:

Qui publico inſtrumento, intra præſtitutum tempus, Illuſtriſſimo Domino de Carcavi ſignificaverit eorum quæ quæſita ſunt demonſtrationem penes ſe

ſe habere; & aut ipſammet demonſtrationem quantùmvis compendioſam ad ipſum miſerit : aut ſi cartæ mandare nondum per otium licuerit, ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem, casûs quem mox deſignabimus calculum dederit, ſeque paratum eſſe profeſſus fuerit omnia omninò demonſtrare ad ipſius D. de Carcavi nutum, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus; & conſentimus, primum qui hæc fecerit primo, ſecundum ſecundo, præmio donandum, ſi ſua ſolutio ab ipſo D. de Carcavi viriſque ad id ſecum adhibitis, cùm ipſi viſum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur, ſalvo ſemper erroris calculo.

Caſus autem, cujus ſolius ſufficiet calculus, ille eſt. Si Semicyclois *ACF* circa baſim *AF* convertatur, & ſolidum indè genitum ſecetur plano per ipſam *AF* (quæ jam hujus ſolidi axis eſt) ducto, quod quidem, ſolidum dividet in duo ſemiſolida paria : alterutrius horum ſemiſolidorum centrum gravitatis aſſignari poſtulamus.



RÉFLEXIONS



RÉFLEXIONS

Sur les conditions des Prix attachés à la solution des Problêmes concernant la Cycloïde.

LE premier Octobre étant arrivé, auquel expiroit le temps destiné pour recevoir les solutions de ceux qui prétendroient aux Prix des Problêmes de la Roulette, appellée en latin *Cyclois*, ou *Trochois*, nous en ouvririons dès à présent l'examen, si l'absence de M. de Carcavi, qui a eu la bonté d'envoyer nos Écrits & d'en recevoir les réponses, ne nous obligeoit à retarder jusques à son retour, qui doit être dans peu de temps. Mais nous avons jugé à propos de répondre cependant à deux sortes de personnes, qui s'efforcent de traverser cet examen par des interprétations ridicules qu'ils font de mes paroles, qu'ils tournent entiérement contre leur sens naturel & contre celui que j'ai eu: essayant, par ces chicaneries, de frustrer ceux qui auroient envoyé les véritables solutions, des Prix qu'ils auroient mérités.

Les premiers sont des gens qui écrivant de pays fort éloignés, mandent, par leurs Lettres du mois d'Août, qu'ayant reçu les Écrits que nous

leur

leur envoyames au mois de Juin, ils vont travailler à cette recherche; mais que pour ouvrir l'examen à Paris, on doit attendre non-ſeulement le premier Octobre 1658, mais encore trois ou quatre mois après, & même huit, ou peut-être un an : n'étant pas impoſſible, diſent-ils, que leurs Lettres, quoiqu'écrites avant le premier Octobre, ſoient très-long-temps en chemin, ſoit par les incommodités de la ſaiſon, ſoit par celles de la guerre, ſoit enfin par les tempêtes de mer qui peuvent arrêter, ou même faire périr les vaiſſeaux qui les portent, auquel cas ils ſeroient recevables d'envoyer de ſecondes Lettres, pourvu qu'ils euſſent de bonnes atteſtations de leurs Officiers publics, qu'elles fuſſent conformes aux premieres, écrites avant le premier Octobre.

Certainement ſi mon intention avoit été telle, & ſi les paroles de mon Écrit le marquoient, je ſerois bien ſuſpect d'avoir propoſé une chimere, en propoſant les Prix, puiſque j'aurois pu ne jamais les donner; & que quiconque ſe fût préſenté au premier Octobre avec ſes ſolutions, j'aurois toujours pu le remettre, dans l'attente de quelque vaiſſeau, qui, ayant eu le vent favorable en portant mes Écrits, pouvoit l'avoir contraire, ou même être péri, en rapportant les réponſes. Et même ceux qui auroient gagné les Prix en ſe trouvant les premiers entre ceux dont on auroit reçu

les

les ſolutions au premier Octobre, ne ſeroient jamais en aſſurance d'en pouvoir jouir, puiſqu'ils pourroient toujours leur être conteſtés par d'autres ſolutions qui pourroient arriver tous les jours, premieres en date, & qui les excluroient ſur la foi des ſignatures des Bourgmeſtres & Officiers de quelque Ville à peine connue, du fond de la Moſcovie, de la Tartarie, de la Cochinchine ou du Japon. D'ailleurs on auroit eu trop de tromperies à craindre ſur cet article; & il n'y eût eu aucune ſûreté à produire ſes réſolutions à l'examen, puiſque des plagiaires auroient pu les déguiſer & les dater d'auparavant, en les faiſant ainſi venir de quelque Iſle bien éloignée.

J'ai voulu agir avec bien plus de clarté, de ſûreté & de promptitude; & c'eſt pourquoi j'ai établi un jour & un lieu fixe : le lieu eſt Paris; le jour eſt le premier Octobre, auquel le temps étant expiré, l'ouverture de l'examen des ſolutions reçues juſqu'alors, doit commencer ſans attendre davantage, & le Prix accordé au premier qui ſe trouvera alors en date, ſans qu'il puiſſe être troublé en ſa poſſeſſion par ceux qui viendront après, leſquels ſeroient toujours, ou ſuſpects, ou au moins trop tard arrivés, & ne ſont plus recevables pour le Prix.

Je ſais bien qu'en cela il y a quelque avantage pour les François, & ſur-tout pour ceux de Paris; mais

mais en faisant faveur aux uns, je n'ai pas fait d'injustice aux autres. Je laisse à tous ceux qui viendront, l'honneur de leur invention; je ne dispose pas de la gloire; le mérite la donne; je n'y touche pas: je ne regle autre chose que la dispensation des Prix, lesquels venant de ma pure libéralité, j'ai pu disposer des conditions avec une entiere liberté. Or je les ai établies de cette sorte; personne n'a sujet de s'en plaindre; je ne devois rien aux Allemands, ni aux Moscovites; je pouvois ne les avoir offerts qu'aux seuls François; je puis en proposer d'autres pour les seuls Flamands, ou pour qui je voudrois. J'y ai néanmoins agi le plus également que j'ai pu; & si les conditions sont plus favorables aux François qu'aux autres, ce n'a été que pour éviter de plus grandes difficultés, & des injustices toutes évidentes comme celle que je viens de représenter. Et ainsi ayant été nécessaire pour les éviter, de déterminer un temps & un lieu, j'ai cru que trois mois & demi suffisoient, & que Paris étoit le lieu le plus propre pour avoir réponse de toutes parts. C'est pourquoi en faisant mes Écrits au mois de Juin, j'ai donné jusqu'au premier Octobre, *intra primam diem Octobris*; & j'ai déclaré que si dans ce temps, d'environ trois mois & demi, il ne se trouvoit personne qui eût résolu mes questions, je les résoudrois alors moi-même, sans attendre davantage : *quod si his circiter tribus elapsis*

menſibus, nullus inveniatur qui quæſita noſtra ſolverit, non denegabimus quæ ipſi invenimus. Par où il eſt ſi viſible que je ne voulois laiſſer paſſer que le temps de ces trois mois pour attendre les ſolutions, qu'il eſt ridicule de m'imputer cet autre ſens, qui, comme j'ai dit, eût rendu les promeſſes des Prix vaines & chimériques : & mon ſecond Écrit le marque encore trop clairement; car voici les regles que j'y ai établies : que ceux-là ſeuls ſeront admis, qui dans le temps preſcrit auront fait ſignifier à M. de Carcavi, par un acte public, qu'ils ont les ſolutions, en lui en envoyant, ou une démonſtration abrégée, ou au moins le calcul d'un certain cas par où il parût qu'ils ont tout réſolu. *Qui publico inſtrumento intra præſtitutum tempus Illuſtriſſimo Domino de Carcavi ſignificaverit ſe eorum quæ quæſita ſunt ſolutionem penes ſe habere, & aut demonſtrationem quantumvis compendioſam ad ipſum miſerit : aut ... ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem casûs quem mox deſignabimus calculum dederit, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus.*

Voilà mes termes, qui aſſurément ne ſouffrent aucune équivoque, & par leſquels j'ai établi les conditions les plus équitables que j'ai pu imaginer : car ayant établi qu'on prendroit date du jour qu'on auroit ſignifié & délivré à M. de Carcavi même, la démonſtration ou le calcul propoſé, j'ai retranché toutes les diſputes ſur la primauté, qui ſeroient

feroient nées, si on avoit pris date du jour de l'envoi; ce qui les auroit fait demeurer indécises durant plusieurs mois ou plusieurs années, comme il a été déja dit. En exigeant qu'on fît cette signification par un acte public, j'ai arrêté de même les soupçons & les disputes qui auroient pu naître entre les prétendants, sur des Écrits de mains privées: chacun ayant intérêt d'être non-seulement premier, mais encore seul; & ayant sujet de demander des preuves plus authentiques que des Écrits de mains privées, pour croire qu'il en est venu d'autres dans le temps, soit devant, soit après soi. Aussi M. de Carcavi, ni moi, ne voulant pas qu'on nous en crût sur notre parole, nous avons averti de prendre des actes publics. Et enfin en me contentant, ou d'une démonstration abrégée, ou au moins du calcul d'un seul cas pour donner date, en attendant qu'on envoyât la démonstration entiere avec plus de loisir, j'ai soulagé les Géometres autant qu'il étoit possible de le faire, puisqu'on ne pouvoit pas moins leur demander, & que néanmoins ce que j'ai demandé est à peu près suffisant: ce calcul étant si difficile & dépendant tellement du fond de la question, qu'on peut juger que qui l'aura trouvé a tout résolu en soi-même, & ne manque plus que de loisir pour l'écrire & l'achever. En quoi je crois avoir gardé un assez juste tempérament; car, d'une part, il n'étoit

pas juste d'exiger une démonstration entiere & écrite au long, & de faire dépendre la primauté du loisir qu'il faut pour cela; & de l'autre côté, il eût été bien plus injuste de ne pas exiger des preuves certaines qui marquassent qu'on a résolu les questions, & d'accorder le premier rang à ceux qui n'auroient donné aucune marque de les avoir résolues: de sorte que j'ai satisfait à tout, en demandant le véritable calcul de ce cas.

Et c'est pourquoi je ne puis assez admirer la vaine imagination de quelques autres, qui ont cru qu'il leur suffiroit d'envoyer un calcul faux & fabriqué au hasard, pour prendre date du jour qu'ils l'auroient donné, sans avoir produit d'autre marque qui fasse connoître qu'ils ont résolu les problêmes: ce qui est une imagination si ridicule, que j'ai honte de m'amuser à la réfuter. Cependant, encore qu'ils sachent fort bien que leur calcul est faux (car cela est visible à l'œil même); qu'ils l'aient mandé eux-mêmes par leurs Lettres, & qu'ils n'en aient envoyé aucun autre, ils ne laissent pas, par la plus plaisante imagination du monde, de se croire en état d'être mis en ordre depuis le jour qu'ils ont produit ce faux calcul: prétendant que ce que j'ai dit en d'autres occasions, toutes différentes, du peu d'égard qu'on doit avoir aux erreurs de calcul (savoir quand la démonstration entiere & géométrique est envoyée en même-temps; car alors la

chose

chose est sans doute) doit aussi avoir lieu lorsqu'on n'envoie autre chose qu'un faux calcul, en laquelle occasion je n'ai jamais dit un seul mot de pardonner ces erreurs. En effet il faudroit avoir perdu le sens pour le dire; car il n'est pas difficile d'entendre quelle différence il y a entre deux personnes qui veulent montrer qu'ils ont résolu une question, dont l'une apporte, pour preuve de son discours, une démonstration parfaite & géométrique sans aucun défaut, à quoi il ajoute encore quelques calculs, tandis que l'autre ne produit autre chose qu'un seul calcul sans aucune sorte de preuve. Qui ne voit la différence qui se trouve entre les conditions de ces deux hommes, en ce qui regarde les erreurs de calcul? Il est toujours juste de pardonner ces erreurs à celui qui donne en même-temps les démonstrations entieres & parfaites, qui rendent le calcul superflu, qui enseignent l'art de le bien faire, qui apprennent à en reconnoître & corriger les défauts, & qui enfin toutes seules convainquent invinciblement qu'on a résolu les questions; mais la condition de l'autre est toute différente, puisque n'ayant donné pour toute marque de ses solutions qu'un seul calcul pour laisser à juger, selon qu'il sera vrai ou faux, qu'il a résolu les questions ou non, s'il se trouve faux en toutes ses parties, que restera-t-il par où on puisse connoître qu'il a trouvé la vérité? Y a-t-il rien de

ſi foible, que de vouloir qu'on lui pardonne toutes les erreurs qui s'y trouveront, & qu'encore qu'il ſoit faux en tout, & qu'il ne contienne rien de vrai, au lieu d'en conclure que l'Auteur n'a pas trouvé la vérité, on en conclue au contraire qu'il poſſédoit la vérité depuis le jour qu'il a produit la fauſſeté? C'eſt aſſurément ce qu'on ne peut non plus conclure d'un faux calcul, que d'une fauſſe démonſtration; car ce que les paralogiſmes ſont en démonſtration, les erreurs de calcul le ſont quand le calcul eſt ſeul : il n'y a que deux manieres de montrer qu'on a réſolu des queſtions; ſavoir, de donner, ou la ſolution ſans paralogiſme, ou le calcul ſans erreur; & c'eſt auſſi une de ces deux choſes que j'ai exigées, pour pouvoir prendre date. Mais n'eſt-ce pas une plaiſante prétention, de vouloir paſſer pour avoir découvert la vérité, par cette ſeule raiſon qu'on a produit une fauſſeté, & de ſe faire préférer aux autres qui auroient produit les véritables calculs, parce qu'on auroit donné une fauſſeté avant eux, & que la regle que j'aurois établie pour reconnoître qui ſeroit le premier qui auroit réſolu les queſtions, fût de voir qui ſeroit le premier qui eût fabriqué une fauſſeté? Si cela étoit ainſi, il eût été bien facile à toutes ſortes de perſonnes d'en fabriquer au haſard & à ſa fantaiſie, & en les envoyant à M. de Carcavi, prendre date dès-lors; en quoi ſans courir aucun riſque, puiſqu'ils

pouvoient ſe rétracter à leur volonté, ils ſe fuſſent acquis cet avantage, que s'ils avoient pu enſuite découvrir la vérité & même après le temps expiré, ou bien avoir quelques lumieres des ſolutions déja données quand on les examineroit, ils auroient été aſſurés d'être les premiers en date, en vertu de la fauſſeté qu'ils auroient les premiers produite : & de cette maniere il ſeroit arrivé que l'honneur de la premiere invention, qui eſt la principale choſe qu'on conſidere en ces matieres, n'auroit pas dépendu de la premiere production de la vérité, mais de la premiere production qu'on auroit faite à ſa fantaiſie d'une fauſſeté; ce qui eſt la choſe du monde la plus extravagante.

Je ſerois bien fâché qu'on me crût capable d'avoir donné pour loi une condition ſi injuſte & ſi impertinente. Mais elle eſt auſſi éloignée de mon ſens que de mes paroles. Quand j'ai dit qu'il ſuffiroit, pour paſſer pour premier, d'envoyer une démonſtration abrégée, ou au moins le calcul d'un ſeul cas, je n'ai pas dit une ſeule parole de pardonner les erreurs de calcul, comme mes paroles, que j'ai déja rapportées, le témoignent : *aut ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem calculum unius casûs miſerit.* Et c'eſt être ridicule de rapporter à ce lieu, où je n'en parle en aucune ſorte, ce que je dis ſur un autre ſujet, ſavoir quand le reſte des démonſtrations & les ſolutions entieres

ſont à loiſir apportées à l'examen, auquel cas ſi les Juges les trouvent toutes véritables & géométriques, on y pardonnera ſans doute les erreurs de calcul (quoique ce ſoit toujours une grace) : *ſi ſolutio exhibita Domino de Carcavi viriſque ſecum ad hoc adhibitis geometrica ac vera judicetur, ſalvo ſemper errore calculi:* leſquelles, comme j'ai déja dit, il eſt toujours auſſi juſte de pardonner en n'agiſſant pas à la rigueur, quand la démonſtration eſt préſente, qu'il eſt hors de raiſon d'y penſer quand on ne produit qu'un ſeul calcul, faux en toutes ſes parties.

Il n'eſt donc que trop viſible que ceux qui ont produit ces calculs faux, ne l'ont fait que pour gagner par-là le temps de chercher à loiſir ce qu'ils n'avoient pas encore trouvé, & ce qu'ils veulent être réputés avoir trouvé depuis le jour qu'ils avoient envoyé leur fauſſeté, s'ils peuvent y arriver enſuite par quelque voie, en quelque temps que ce ſoit. Mais c'eſt en vain qu'ils ont tenté cette fineſſe ; car la regle eſt écrite : il falloit envoyer le calcul dans le temps, s'ils l'euſſent eu ; & un calcul faux, en toutes ſes parties, n'eſt en aucune ſorte un calcul ; & ainſi quand ils l'auroient envoyé, même ſigné par un Notaire, ce ne ſeroit que des erreurs ſignées par Notaire, & ils ſeront réputés comme n'ayant rien envoyé.

Leurs calculs ſont donc juſtement réputés nuls, puiſqu'il

puiſqu'il n'y avoit que deux meſures à déſigner, & qu'ils les ont données toutes deux fauſſes, & chacune d'environ de la moitié. Cependant quelques-uns de ceux-là qui déclarent franchement qu'ils ſavent bien qu'elles ſont fauſſes, mais en ne laiſſant pas de prétendre d'en avoir acquis leur rang, diſent auſſi qu'ils en ont maintenant un autre calcul qu'ils aſſurent être le véritable, mais ils ne l'envoient pas; ce qui ne fait que trop paroître leur fineſſe : car s'ils l'avoient en effet, que ne l'envoyoient-ils en même-temps ? vu même qu'il ne falloit pas quatre lignes pour l'écrire, & qu'au lieu de cela, ils emploient des pages entieres à dire qu'ils l'enverront ſi on le leur demande; mais ce n'étoit pas cela qu'il falloit faire, il falloit l'envoyer s'ils l'avoient : la regle n'étant pas de le promettre dans le temps, mais de l'envoyer réellement. C'eſt cela qui fait foi; mais pour les ſimples promeſſes qu'ils font, on n'eſt pas plus obligé de les croire, qu'en ce qu'ils promettent avec une pareille certitude dans les mêmes Lettres, qu'ils enverront auſſi dans peu de temps la Quadrature du cercle, & même en deux manieres différentes : de toutes leſquelles choſes il ſera cependant fort permis de douter, juſqu'à ce qu'il en paroiſſe d'autres preuves que des paroles. Et ainſi puiſqu'ils ont laiſſé paſſer le temps ſans envoyer, ni le vrai calcul demandé, ni aucune ſolution, ni aucune autre choſe, & qu'ils nous ont

ainſi

ainſi laiſſés entiérement dans le doute, s'ils ont en effet réſolu nos queſtions, ou en quel temps ils les ont réſolues, leurs faux calculs ne nous en donnant aucune marque, nous leur déclarons ſans les nommer, ni les marquer en aucune maniere, qu'ils ne ſont plus recevables quant aux Prix; que le temps en eſt paſſé à leur égard; que nous allons examiner les calculs & les ſolutions des autres qui ont été reçues dans le temps; & que pour eux qui ne peuvent plus prétendre, ni aux Prix, ni à l'honneur de la premiere invention, il leur reſte au moins celui de corriger leurs erreurs après l'avertiſſement qu'on leur en donne; ce qui leur ſera d'autant plus facile, que le véritable calcul commence maintenant d'être divulgué. Car comme je m'étois engagé par mon premier Écrit, de le publier auſſi-tôt que le temps ſeroit expiré, j'ai commencé à le faire dans le commencement d'Octobre; & parce que je ne ſais pas encore ſi entre tous ceux qui ont déja envoyé les leurs à M. de Carcavi, il y en a qui l'aient rencontré, & que s'il s'en trouve, il eſt juſte que je le laiſſe publier ſous leur nom, je n'ai pas encore voulu l'imprimer ſous le mien; mais parce qu'il n'eſt pas juſte auſſi que d'autres s'en attribuent déſormais l'invention, le temps où je me ſuis obligé de le laiſſer chercher étant fini, je l'ai donné écrit à la main à pluſieurs perſonnes dignes de foi, & entr'autres
à

à M. de Carcavi, à M. de Roberval, Professeur Royal des Mathématiques, à M. Gallois, Notaire Royal à Paris, & à plusieurs personnes de France & d'ailleurs, très-considérables par leurs qualités & par leur science, afin que, comme j'ai déja dit, si ceux dont on a reçu les solutions, l'ont trouvé, je leur en quitte la gloire, sinon, qu'on sache qui en est le premier inventeur.

Voilà ce que nous avions à dire généralement pour tous ceux dont les calculs & les solutions qu'on a reçues dans le temps, se trouveront évidemment fausses dans l'examen, & pour tous ceux qui prétendroient qu'on devroit désormais en recevoir de nouvelles.

Ce 7 Octobre 1658.

J'espere donner dans peu de jours la maniere dont on est venu à la connoissance de cette ligne, & qui est le premier qui en a examiné la nature; c'est ce que j'appellerai l'*Histoire de la Roulette.*





ANNOTATA

In quasdam solutiones Problematum de Cycloide.

ELAPSO tempore Præmiis comparandis destinato, & ad Kalendas Octobris terminato, verum calculum casûs à me propositi hucusquè latentem novissimè evulgare cœpi, ut si in examinandis solutionibus quæ à diversis Geometris intra præstitutum tempus missæ sunt, quædam reperiatur quæ eòdem inciderit, ejus Author Præmio & gloriâ inventionis potiatur : sin verò, ego meo nomine publici tunc juris faciam illum quem interim manuscriptum ad plurimos jam undequaquè misi ; & inter cæteros ad Illustrissimum D. de Carcavi, ad clarissimum ac insignissimum Geometram D. de Roberval, Regium Mathematicorum Professorem, ad integerrimum Virum D. Gallois, Notarium Regium, ac ad diversos alios tum dignitate, tum scientiâ præcellentissimos viros, qui rogati sunt diem quo eum receperunt annotare & subsignare.

Deindè solutiones apud D. de Carcavi missas ab eo tempore quo Lutetiam deseruit, examinare aggressus sum (quæ enim ante abscessum suum receperat

ceperat in arculis clausas reliquit, nec ante suum reditum poterunt perpendi). Ab eâ ergo, ex iis quas apud eum reperi, incipere visum est, quæ gravissima est, quippè quæ absque ullâ demonstratione in solo calculo consistit casûs quem designaveram; quem quidem calculum postulaveram, ut ex eo, prout verus aut falsus esset, dignosci possit, an ejus Author absolvisset nec-ne, quæ se absolvisse profiteretur problemata. Sic enim locutus eram: *Qui quæstiones resolverit, significabit intra præstitutum tempus D. de Carcavi, & quidem instrumento publico, se solutiones habere.* Et quia simplex illa assertio omni probatione destituta, vana prorsus fuisset & jus nullum Authori suo dedisset cur aliis præferretur, subjunxi: *Et ad confirmandam suæ assertionis veritatem, aut demonstrationem compendiosam miserit, aut saltem calculum istius casûs* ex cujus nempè veritate, de veritate assertionis judicaretur.

Hic igitur Author calculum suum hujus casûs misit in indicium veritatis à se repertæ. At verò calculus iste suus nimiùm falsus est, & nihil prorsùs veri continet. Duas enim solùm mensuras profert, & ambas falsas, &, ut dictum est, nimiùm falsas: ita ut calculus ille quem Author *ad confirmandam suæ assertionis veritatem* juxta præscriptam legem misit, nihil aliud confirmet, nisi ipsùm vanè asseruisse se demonstrationem penes se habere. Falsus enim calculus, in indicium solutionis adductus,

ductus, falsitatem potiùs quàm veritatem solutionis indicat. Adeòque miror hunc Authorem, ea quæ de calculi erroribus condonandis in aliâ omninò occasione diximus, ad istam trahere voluisse: non intelligens quanta sit differentia inter eum qui asserens se cujusvis quæstionis solutionem habere, nullam demonstrationem affert, sed solummodò calculum, ex quo solo suadere nititur se verè rem absolvisse; & eum qui totius quæstionis solutionem omni ex parte geometricè demonstratam profert, & simul cum hac solidâ demonstratione, etiam superaddit calculum. Magnum sanè est inter utrumque discrimen, quantùm ad errores calculi attinet. Qui enim solutionem geometricè demonstratam exhibet, nullum de suâ solutione dubium relinquit, eique æquum est semper condonare errores calculi qui præsenti demonstrationis luce evanescunt & corriguntur.

Alter verò qui nihil aliud quàm calculum sine ullâ demonstratione porrigit, si erroneus sit, & nullam veram mensuram habeat, quid ei supererit undè patefaciat se rem resolvisse? An sola falsitas, repertæ veritatis indicium est? Ut ergo ex demonstratione falsâ non ostenderetur detectam esse veritatem, sic & nec ex falso calculo ostenditur. Quod enim paralogismus est in demonstratione, hoc error calculi est in calculo solo, & demonstratione destituto; nec aliter quis judicare

potest

potest se quæstionem resolvisse, nisi aut demonstrationem paralogismis purgatam, aut saltem calculum erroris expertem proferendo.

Et ideò cùm apud me statuissem experiri ac certò dignoscere quis futurus esset primus, qui quæstiones nostras absolveret, hæc indicia flagitavi, ut intra præstitutum tempus, aut demonstratio ipsa, quantumvis compendiosa, aut saltem calculus illius quem designaveram casûs, prodiret: quibus verbis quis aliud intelliget quàm verum calculum; non autem falsum? falsus enim calculus non est calculus. Et quid stultius fuisset, quàm ex calculo falso, & nihil veri habente, concludere Authorem suum veram possidere demonstrationem, ipsique primas dare, & jus concedere ut omnibus aliis posthabitis, prior habeatur solutionis inventor? Non planè ea mihi intentio fuit; & si ita esset, liberum cuilibet fuisset statim atque scripta nostra vulgata sunt, calculum fictitium quantumvis erroneum ad libitum componere, & ex eo tamen ordinem sibi ascribere, ac nullum damnum metuendo, indè securitatem adipisci, ut si quâ deindè viâ problemata etiam ultimo loco solvisset, ad prima tamen Præmia veniret, quia falsum calculum primus protulisset. Et ita foret, ut primæ inventionis honor, qui his in rebus præcipus est, non à primâ veritatis detectione, sed à primâ falsitate pro arbitratu fabricatâ, penderet. Absit ut tam iniquam

&

& ineptam conditionem pro lege dederim! Hoc certè longè abest sicut à mente meâ, sic & à verbis meis, quæ ita se habent.

Qui publico instrumento, intra præstitutum tempus Illustrissimo D. de Carcavi significaverit, se eorum quæ quæsita sunt demonstrationem penes se habere; & aut ipsammet demonstrationem ad ipsum miserit: aut saltem, ad confirmandam suæ assertionis veritatem casûs quem mox designabimus calculum dederit (Ibi nulla prorsus facta est ut nec fieri potuit, de condonandis erroribus mentio) *seque paratum esse professus fuerit omnia omninò demonstrare ad ipsius D. de Carcavi nutum, hunc nobis satisfecisse declaramus; & consentimus primum qui hæc fecerit primo, secundum secundo Præmio donandum.* Hæc ergo prima est conditio, ut aut ipsa abbreviata solutio mittatur, aut saltem calculus, nullâ de condonandis erroribus factâ mentione. Quia vero hic calculus etiam verus non omninò sufficiebat ad Præmia obtinenda, hanc secundam conditionem ut æquum erat subjunxi: *si sua solutio ab ipso D. de Carcavi virisque ad id secum adhibitis, cùm ipsi visum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera judicetur, salvo semper errore calculi.* Ibi sanè, ubi de examinandis demonstrationibus agitur, jure condonantur errores calculi; cùm enim adest demonstratio, ita eos negligere semper justum est, ac ridiculum foret cùm calculus solus exhibitur, qui si nihil

nihil veri habeat calculus non est, ut jam satis diximus.

Talis est autem calculus Authoris illius de quo hîc agitur, nec quicquam veri continet; ipsiusque falsitatem Author ipsemet agnovit, illumque posterioribus litteris revocavit, nec ullum alium misit, & sic reverà nihil misisse censendus est. Se tamen alium calculum penes se habere scribit, quem verum esse asserit; cujus novæ assertionis cùm nullum hucusque indicium protulerit, sed mera tantùm verba, non plus in hâc re fidei meretur quàm cùm in eisdem epistolis, pari fiduciâ promittit se brevi missurum quadraturam circuli & hyperboles duabus diversis methodis expeditam; de quibus omnibus periti quique interim non temerè dubitabunt. Si enim calculum quæsitum reverà haberet, cur non intra tempus constitutum misisset non video : hoc enim promptius fuisset quàm fusis quibus utitur verbis polliceri. Calculum autem verum promittendo, & non mittendo, spatium quærendi sibi præparare videtur, & si fortè etiam extra tempus reperiat, aut aliquo modo illius quem jam ad multos misimus notitiam habere possit, illum ipse sibi fortassis, & quasi à se jamdiù repertum, & intra debitum tempus ascribat. Melius tamen de ipso sentimus, hæc enim frustra & inaniter tentaret. Oportebat quippe si habuisset, intra tempus destinatum misisse, scripta namque lex instat,

qui intra præstitutum tempus publico instrumento calculum saltem miserit. Ille autem nihil ex iis implevit; non enim instrumentum publicum, sed privatas cartulas adduxit, quas sanè reliqui Authores qui publicas, ut postulatum est, attulerunt, respuent, sive posteriores sint ut ei præponantur, sive priores fuerint ut soli & sine socio habeantur; quibus cùm ego debitor sim, resistere non possem, non enim privatis scripturis fides adhibetur, nec ut ipsi verbis meis credant, auderem aut vellem petere; & ideò publicum instrumentum flagitaveram fide ex se ipso dignum. Author autem ille nec tale instrumentum validum attulit, sed & nec verum calculum dedit, solam verò falsitatem, & sic cùm nobis omninò dubium reliquerit an quæstiones resolverit, aut à quo tempore resolverit, quidquid de hâc quæstione scripsit tanquam aut inane aut falsum, & quasi non fuisset, habendum est; & cùm jam elapsum sit tempus, ipse Author jure ab istâ Palæstrâ, quantùm ad Præmia attinet, exclusus est.

Ipse verò cùm jam ad primæ inventionis honorem, divulgato à nobis vero calculo, pervenire non possit, suos saltem errores corrigendi gloriam monitus conetur adipisci.

Datum 9 Octobris 1658.

HISTOIRE



HISTOIRE DE LA ROULETTE,

APPELLÉE AUTREMENT

TROCHOÏDE OU CYCLOÏDE:

Où l'on rapporte par quels dégrés on eſt arrivé à la connoiſſance de cette ligne.

LA Roulette eſt une ligne ſi commune, qu'après la droite & la circulaire, il n'y en a point de ſi fréquente; & elle ſe décrit ſi ſouvent aux yeux de tout le monde, qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été conſidérée par les anciens, dans leſquels on n'en trouve rien : car ce n'eſt autre choſe que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de ſon mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre, juſqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, après un tour entier achevé : ſuppoſant que la roue ſoit un cercle parfait, le clou un point dans ſa circonférence, & la terre parfaitement plane.

Le feu P. Merſenne, Minime, fut le premier qui la remarqua environ l'an 1615, en conſidérant le roulement des roues; ce fut pourquoi il l'appella *la Roulette*. Il voulut enſuite en reconnoître

la nature & les propriétés; mais il ne put y pénétrer.

Il avoit un talent tout particulier pour former de belles questions; en quoi il n'avoit peut-être pas de semblable : mais encore qu'il n'eût pas un pareil bonheur à les résoudre, & que ce soit proprement en ceci que consiste tout l'honneur, il est vrai néanmoins qu'on lui a obligation, & qu'il a donné l'occasion de plusieurs belles découvertes, qui peut-être n'auroient jamais été faites, s'il n'y eût excité les Savants.

Il proposa donc la recherche de la nature de cette ligne, à tous ceux de l'Europe qu'il en crut capables, & entre autres à Galilée; mais aucun ne put y réussir, & tous en désespérerent.

Plusieurs années se passerent de cette sorte jusques en 1634, que le Pere voyant résoudre à M. de Roberval, Professeur Royal de Mathématiques, plusieurs grands problêmes, il espéra de tirer de lui la solution de la Roulette.

En effet M. de Roberval y réussit; il démontra que l'espace de la Roulette est triple de la roue qui la forme. Ce fut alors qu'il commença de l'appeller par ce nom tiré du grec, *Trochoïdes*, correspondant au mot françois, *Roulette*. Il dit au Pere que sa question étoit résolue, & lui déclara même cette raison triple, en exigeant néanmoins qu'il la tiendroit secrete durant un an, pendant lequel il proposeroit de nouveau cette question à tous les Géometres.

Le

Le Pere, ravi de ce ſuccès, leur écrivit à tous, & les preſſa d'y repenſer, en leur ajoutant que M. de Roberval l'avoit réſolue, ſans leur dire comment.

L'année & plus étant paſſée, ſans qu'aucun en eût trouvé la ſolution, le Pere leur écrivit pour la troiſieme fois, & leur déclara alors la raiſon de la Roulette à la roue, comme 3 à 1. En 1635, ſur ce nouveau ſecours, il s'en trouva deux qui en donnerent la démonſtration : on reçut leurs ſolutions preſque en même-temps; l'une de M. de Fermat, Conſeiller au Parlement de Toulouſe, l'autre de feu M. Deſcartes, & toutes deux différentes l'une de l'autre, & encore de celle de M. de Roberval : de telle ſorte néanmoins qu'en les voyant toutes, il n'eſt pas difficile de reconnoître quelle eſt celle de l'Auteur; car il eſt vrai qu'elle a un caractere particulier, & qu'elle eſt priſe par une voie ſi belle & ſi ſimple, qu'on connoît bien que c'eſt la naturelle. Et c'eſt en effet par cette voie qu'il eſt arrivé à des dimenſions bien plus difficiles ſur ce ſujet, à quoi les autres méthodes n'ont pu ſervir.

Ainſi la choſe devint publique, & il n'y eut perſonne en France, de ceux qui ſe plaiſent à la Géométrie, qui ne ſût que M. de Roberval étoit l'Auteur de cette ſolution, à laquelle il en ajouta en ce même temps deux autres : l'une fut la di-

menſion du ſolide à l'entour de la baſe, l'autre, l'invention des touchantes de cette ligne, par une méthode qu'il trouva alors, & qu'il divulgua incontinent, laquelle eſt ſi générale, qu'elle s'étend aux touchantes de toutes les courbes : elle conſiſte en la compoſition des mouvements.

En 1638, feu M. de Beaugrand ayant ramaſſé les ſolutions du plan de la Roulette, dont il y avoit pluſieurs copies, avec une excellente méthode, *de maximis & minimis*, de M. de Fermat, il envoya l'une & l'autre à Galilée, ſans en nommer les Auteurs : il eſt vrai qu'il ne dit pas préciſément que cela fût de lui ; mais il écrivit de ſorte qu'en n'y prenant pas garde de près, il ſembloit que ce n'étoit que par modeſtie qu'il n'y avoit pas mis ſon nom ; & pour déguiſer un peu les choſes, il changea les premiers noms de *Roulette* & *Trochoïde*, en celui de *Cycloïde*.

Galilée mourut bientôt après, & M. de Beaugrand auſſi. Toricelli ſuccéda à Galilée, & tous ſes papiers lui étant venus entre les mains, il y trouva entre autres ces ſolutions de la Roulette ſous le nom de *Cycloïde*, écrites de la main de M. de Beaugrand, qui paroiſſoit en être l'Auteur, lequel étant mort, il crut qu'il y avoit aſſez de temps paſſé pour faire que la mémoire en fût perdue, & ainſi il penſa à en profiter.

Il fit donc imprimer ſon Livre en 1644, dans lequel

lequel il attribue à Galilée ce qui eſt dû au P. Merſenne, d'avoir formé la queſtion de la Roulette; & à ſoi-même ce qui eſt dû à M. de Roberval, d'en avoir le premier donné la réſolution: en quoi il fut non-ſeulement inexcuſable, mais encore malheureux; car ce fut un ſujet de rire en France, de voir que Toricelli s'attribuoit en 1644, une invention qui étoit publiquement & ſans conteſtation reconnue depuis huit ans pour être de M. de Roberval, & dont il y avoit, outre une infinité de témoins vivants, des témoignages imprimés, & entre autres un Écrit de M. Deſargues, imprimé à Paris au mois d'Août 1640, avec Privilege, où il eſt dit, & que la Roulette eſt de M. de Roberval, & que la Méthode *de maximis & minimis* eſt de M. de Fermat.

M. de Roberval s'en plaignit donc à Toricelli, par une Lettre qu'il lui en écrivit la même année; & le P. Merſenne en même-temps, mais encore plus ſévérement: il lui donna tant de preuves, & imprimées, & de toutes ſortes, qu'il l'obligea d'y donner les mains, & de céder cette invention à M. de Roberval, comme il fit par ſes Lettres que l'on garde, écrites de ſa main, du même temps.

Cependant comme ſon Livre eſt public, & que ſon déſaveu ne l'eſt pas, M. de Roberval ayant ſi peu de ſoin de ſe faire paroître, qu'il n'en a jamais rien fait imprimer; beaucoup de monde y a

été ſurpris, & je l'avois été moi-même; ce qui a été cauſe que par mes premiers Écrits, je parle de cette ligne comme étant de Toricelli, & c'eſt pourquoi je me ſuis ſenti obligé de rendre par celui-ci à M. de Roberval, ce qui lui appartient véritablement.

Toricelli ayant reçu cette petite diſgrace, & ne pouvant plus paſſer auprès de ceux qui ſavoient la vérité, pour Auteur de la dimenſion de l'eſpace de la Roulette, ni même de celle du ſolide autour de la baſe, M. de Roberval la lui ayant déja envoyée, il eſſaya de réſoudre celui à l'entour de l'axe. Mais ce fut là qu'il trouva bien de la difficulté; car c'eſt un problême d'une haute, longue & pénible recherche. Ne pouvant donc y réuſſir, il en envoya une ſolution aſſez approchante, au lieu de la véritable, & manda que ce ſolide étoit à ſon cylindre comme 11 à 18: ne penſant pas qu'on pût le convaincre. Mais il ne fut pas plus heureux en cette rencontre qu'en l'autre; car M. de Roberval, qui en avoit la véritable & géométrique dimenſion, lui manda non-ſeulement ſon erreur, mais encore la vérité. Toricelli mourut peu de temps après.

M. de Roberval ne s'arrêta pas à la ſeule dimenſion de la premiere & ſimple Roulette & de ſes ſolides; mais il étendit ſes découvertes à toutes ſortes de Roulettes, *alongées* ou *accourcies*, pour

toutes lesquelles ses méthodes sont générales, & donnent, avec une même facilité, les touchantes, la dimension des plans & de leurs parties, leurs centres de gravité, & les solides, tant autour de la base, qu'autour de l'axe. Car encore qu'il ne l'ait donné au long que des Roulettes entieres, sa méthode s'étend sans rien y changer, & avec autant de facilité aux parties, & ce seroit chicaner que de lui en disputer la premiere résolution.

La connoissance de la Roulette ayant été portée jusques-là par M. de Roberval, la chose étoit demeurée en cet état depuis quatorze ans; lorsqu'une occasion imprévue m'ayant fait penser à la Géométrie que j'avois quittée il y avoit long-temps, je me formai des méthodes pour la dimension & les centres de gravité des solides, des surfaces planes & courbes, & des lignes courbes, auxquelles il me sembla que peu de choses pourroient échapper: & pour en faire l'essai sur un sujet des plus difficiles, je me proposai ce qui restoit à connoître de la nature de cette ligne; savoir, les centres de gravité de ses solides, & des solides de ses parties; la dimension & les centres de gravité des surfaces de tous ces solides; la dimension & les centres de gravité de la ligne courbe même de la Roulette & de ses parties.

Je commençai par les centres de gravité des solides & des demi-solides, que je trouvai par ma méthode,

méthode, & qui me parurent ſi difficiles par toute autre voie, que, pour ſavoir s'ils l'étoient en effet autant que je me l'étois imaginé, je me réſolus d'en propoſer la recherche à tous les Géometres, & même avec des Prix. Ce fut alors que je fis mes Écrits latins, leſquels ont été envoyés partout : & pendant qu'on cherchoit ces problêmes, touchant les ſolides, j'ai réſolu tous les autres, comme on verra à la fin de ce diſcours, quand j'aurai parlé des réponſes qu'on a reçues des Géometres ſur le ſujet de mes Écrits.

Elles ſont de deux ſortes. Les uns prétendent d'avoir réſolu les problêmes propoſés, & ainſi avoir droit aux Prix ; & les Écrits de ceux-là ſeront vus dans l'examen régulier qui doit s'en faire. Les autres n'ont point voulu prétendre à ces ſolutions, & ſe ſont contentés de donner leurs premieres penſées ſur cette ligne.

J'ai trouvé de belles choſes dans leurs Lettres, & des manieres fort ſubtiles de meſurer le plan de la Roulette, & entre autres dans celles de M. Sluze, Chanoine de la Cathédrale de Liege ; de M. Richi, Romain ; de M. Huguens, Hollandois, qui a le premier produit que la portion de la Roulette, retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du côté du ſommet, eſt égal à un eſpace rectiligne donné : & j'ai trouvé la même choſe dans une Lettre de

M. Wren,

M. Wren, Anglois, écrite presque en même-temps.

On a vu aussi la dimension de la Roulette & de ses parties, & de leurs solides à l'entour de la base seulement, du R. P. Lallouere, Jésuite de Toulouse. Comme il l'envoya toute imprimée, j'y fis plus de réflexion; & je fus surpris de voir que tous les problêmes qu'il y résout, n'étant autre chose que les premiers de ceux que M. de Roberval avoit résolus depuis si long-temps, il les donnoit néanmoins sous son nom, sans dire un seul mot de l'Auteur. Car encore que sa méthode soit différente, on sait assez combien c'est une chose aisée, non-seulement de déguiser des propositions déja trouvées, mais encore de les résoudre d'une maniere nouvelle, par la connoissance qu'on a déja eue une fois de la premiere solution.

Je priai donc instamment M. de Carcavi, non-seulement de faire avertir le Révérend Pere que tout cela étoit de M. de Roberval, ou au moins manifestement enfermé dans ses moyens, mais encore de lui découvrir la voie par laquelle il y est arrivé (car on ne doit pas craindre de s'ouvrir entre les personnes d'honneur). Je lui fis donc mander que cette voie de la premiere découverte étoit la quadrature que l'Auteur avoit trouvée depuis long-temps, d'une figure qui se décrit d'un trait de compas sur la surface d'un cylindre droit, laquelle surface étant étendue en plan, forme la moitié

tié d'une ligne, qu'il a appellée *la compagne de la Roulette*, dont les ordonnées à l'axe ſont égales aux ordonnées de la Roulette, diminuées de celles de la roue. En quoi je crus faire un plaiſir particulier au Révérend Pere, parce que dans ſes Lettres que nous avons, il parle de la quadrature de cette figure, qu'il appelle *Cycloï-cylindrique*, comme d'une choſe très-éloignée de ſa connoiſſance, & qu'il eût fort deſiré connoître. M. de Carcavi n'ayant pas eu aſſez de loiſir, a fait mander tout cela & fort au long, par un de ſes amis, au Révérend Pere, qui a fait réponſe.

Mais entre tous les Écrits qu'on a reçus de cette ſorte, il n'y a rien de plus beau que ce qui a été envoyé par M. Wren. Car outre la belle maniere qu'il donne de meſurer le plan de la Roulette, il a donné la comparaiſon de la ligne courbe même & de ſes parties, avec la ligne droite : ſa propoſition eſt, que la ligne de la Roulette eſt quadruple de ſon axe, dont il a envoyé l'énonciation ſans démonſtration. Et comme il eſt le premier qui l'a produite, c'eſt ſans doute à lui que l'honneur de la premiere invention en appartient.

Je ne croirai pas pourtant lui rien ôter, pour dire, ce qui eſt auſſi véritable, que quelques Géometres de France, auxquels cette énonciation a été communiquée, en ont trouvé la démonſtration ſur le champ, & entre autres M. de Fermat. Et je dirai

rai de plus que M. de Roberval a témoigné que cette connoiſſance ne lui étoit pas nouvelle : car auſſi-tôt qu'on lui en parla, il en donna la démonſtration entiere, avec une très-belle méthode pour la dimenſion de toutes les courbes, laquelle il n'avoit point encore voulu publier : eſpérant d'en tirer quelques connoiſſances encore plus conſidérables, comme en effet c'étoit par-là qu'il avoit comparé depuis long-temps les lignes ſpirales aux paraboliques ; on en voit quelque choſe dans les Œuvres du R. P. Merſenne.

Cette méthode eſt encore tirée de la compoſition des mouvements, de même que celle des touchantes : car comme la direction du mouvement compoſé donne la touchante, ainſi ſa vîteſſe donne la longueur de la courbe, dont voici la premiere publication.

Voilà ce que j'ai trouvé de plus remarquable dans les Écrits de ceux qui ne prétendent point aux Prix. Quant aux autres, je n'en parlerai qu'après l'examen qui devoit s'en ouvrir le premier Octobre, mais que nous ſommes obligés de remettre au retour de M. de Carcavi, qu'on attend de jour en jour.

C'eſt alors qu'on jugera de ceux qui auront ſatisfait aux quatre conditions portées par mes Écrits, publiés au mois de Juin ; ſavoir :

1°. Que la ſolution ait été reçue & ſignifiée chez M.

M. de Carcavi dans le premier Octobre, qui est le temps prescrit : *Qui intra præstitutum tempus Illustrissimo D. de Carcavi significaverit*, *&c.*

2°. Qu'elle soit accompagnée d'un acte public, *instrumento publico*, pour ôter tout soupçon.

3°. Qu'elle contienne, ou une démonstration abrégée, ou au moins le calcul d'un cas que je demande pour reconnoître, par la qualité de ce calcul, si celui qui l'envoie avoit en effet dès-lors la résolution nette & parfaite des problêmes : *aut saltem ad confirmandam suæ assertionis veritatem casûs quem mox designabimus calculum dederit* ; ce qui paroîtroit être vrai ou faux, selon que le calcul seroit vrai ou faux.

4°. Que l'on enverroit ensuite & à loisir l'entiere démonstration de tous les autres cas proposés, *omnia omninò demonstrare* ; & qu'elle soit jugée vraie & géométrique en toutes ses parties, par ceux que M. de Carcavi voudra nommer. Et j'ai même pardonné les erreurs de calcul qui se trouveront dans ces dernieres & entieres démonstrations de tous les cas généralement : parce que quand les démonstrations sont présentes, les calculs ne sont jamais nécessaires, & les erreurs y sont toujours pardonnables.

S'il s'en trouve qui soient dans ces conditions, le premier aura le premier Prix, & le second, le second : s'il n'y en a qu'un, il les aura tous deux.

Mais

Mais ceux qui ne les auront pas toutes accomplies, ſeront exclus des Prix, quoiqu'ils ne le ſoient pas de l'honneur, qui leur appartiendra toujours par le mérite des Écrits qu'ils pourront produire. Car je n'ai pas mis des conditions à la diſpenſation de l'honneur, dont je ne diſpoſe pas, mais ſeulement à celle des Prix dont j'ai pu diſpoſer à mon gré.

Que s'il ne ſe trouve perſonne dans l'examen qui ait réſolu les problêmes, je les donnerai alors moi-même, comme je me ſuis obligé par mes Écrits de le faire, quand le temps ſeroit expiré; c'eſt-à-dire, au premier Octobre. Et j'ai en effet déja commencé à divulguer mon calcul, que j'ai donné écrit à la main à pluſieurs perſonnes dignes de foi, & entre autres, à M. de Carcavi, à M. de Roberval, à M. Galois, Notaire Royal à Paris, & à pluſieurs autres perſonnes de France, & d'ailleurs très-conſidérables par leur qualité & par leur ſcience, qui ont marqué le jour qu'ils l'ont reçu. J'ai cru à propos d'en uſer ainſi, & de ne pas le faire encore imprimer, afin que ſi dans l'examen il s'en trouve qui l'aient déja rencontré, je publie qu'ils l'ont réſolu avant que j'euſſe divulgué ma ſolution; ſinon je donnerai publiquement ce que perſonne n'aura trouvé, & j'y ajouterai encore les problêmes ſuivants, qui reſtent ſur la nature de la Roulette, dont quelques-uns ne me ſemblent pas moins difficiles.

1°. Le

1°. Le point *Z*, étant donné où l'on voudra, dans la Roulette ſimple, trouver non-ſeulement la dimenſion de la ligne courbe *Z A*, compriſe entre le point *Z* & le ſommet (ce que M. Wren a réſolu), mais encore le centre de gravité de cette portion de la ligne courbe.

2°. Trouver la dimenſion de la ſurface décrite par cette portion de la ligne courbe, tournée, tant autour de la baſe (ce qui eſt facile), qu'autour de l'axe, d'un tour entier, ou d'un demi, ou d'un quart, ou de telle partie de tour qu'on voudra.

3°. Trouver le centre de gravité de cette ſurface, ou demi-ſurface, ou quart de ſurface, &c.; ce qui eſt le plus difficile & proprement le ſeul que je propoſe.

Dans tous leſquels problêmes je ſuppoſe la quadrature du cercle, où il eſt néceſſaire de la ſuppoſer.

Voilà ce qui reſtoit à découvrir ſur la nature de cette ligne, & dont je tiendrai la ſolution ſecrete juſqu'au dernier Décembre de cette année 1658, afin que ſi quelqu'un en trouve la ſolution dans ce temps, il ait l'honneur de l'invention. Mais ce temps expiré, ſi perſonne ne la donne, je la donnerai alors; & même la dimenſion générale des lignes courbes de toutes les Cycloïdes alongées ou accourcies; leſquelles ne ſont pas égales à des lignes droites, mais à des ellipſes.

C'eſt

C'eſt là que j'ai fini de conſidérer la nature de cette ligne. Et pour reprendre, en peu de mots, toute cette Hiſtoire, il paroît :

Que le premier qui a remarqué cette ligne en la nature, mais ſans en pénétrer les propriétés, a été le P. Merſenne.

Que le premier qui en a connu la nature, trouvé les touchantes, meſuré les plans & les ſolides, & donné le centre de gravité du plan & de ſes parties, a été M. de Roberval.

Que le premier qui en a meſuré la ligne courbe, a été M. Wren.

Et qu'enfin j'ai trouvé le centre de gravité des ſolides & demi-ſolides de la ligne & de ſes parties, tant autour de la baſe, qu'autour de l'axe; le centre de gravité des ſurfaces, demi-ſurfaces, quart de ſurfaces, &c. décrites par la ligne & par ſes parties, tournées autour de la baſe & autour de l'axe; & la dimenſion de toutes les lignes courbes des Roulettes alongées ou accourcies.

Ce 10 Octobre 1658.





HISTORIA TROCHOIDIS, *SIVE CYCLOIDIS*, GALLICÈ, *LA ROULETTE:*

In quâ narratur quibus gradibus ad intimam illius lineæ naturam cognoſcendam perventum ſit.

INTER infinitas linearum curvarum ſpecies, ſi unam circularem excipias, nulla eſt quæ nobis frequentiùs occurrat quàm Trochoides (gallicè *la Roulette*): ut mirùm ſit quòd illa priſcorum ſeculorum Geometras latuerit, apud quos de tali lineâ nihil prorsùs reperiri certum eſt.

Deſcribitur à clavo rotæ in ſublimi delato, dum rota ipſa, motu rotis peculiari, ſecundùm orbitam ſuam rectâ fertur ſimul & circumvolvitur, initio motûs ſumpto, dum clavus orbitam tangit, uſque dum abſolutâ unâ converſione, clavus idem iterùm eandem tangat orbitam. Supponimus autem hîc ad Geometriæ ſpeculationem, rotam eſſe perfectè circularem; clavum, punctum in circumferentiâ illius aſſumptum; iter rotæ, perfectè planum; orbitam denique perfectè rectam, quam circumferentia rotæ continuò tangat; ambabus, orbitâ inquam

inquam & circumferentiâ, in uno eodemque plano inter movendum ubique exiſtentibus.

Hanc lineam primus omnium advertit Merſennus, ex Minimorum Ordine, circa annum 1615, dum rotarum motus attentiùs conſideraret; atque indè rotulæ ei nomen indidit; poſt ille naturam ejus & proprietates inſpicere voluit, ſed irrito conatu.

Erat huic viro ad excogitandas arduas ejuſmodi quæſtiones ſingulare quoddam acumen, & quo omnes in eo genere facilè ſuperaret: quanquam autem in iiſdem diſſolvendis, quæ præcipua hujuſce negotii laus eſt, non eâdem felicitate utebatur. Tamen hoc nomine de litteris optimè meritus eſt, quòd permultis iiſque pulcherrimis inventis occaſionem præbuerit, dum ad eorum inquiſitionem eruditos de illis neque cogitantes excitaret.

Ergo naturam Trochoidis omnibus quos huic operi credidit pares, indagandam propoſuit, in primiſque Galileo: at nemini res ex ſententiâ ceſſit, omneſque de nodi illius diſſolutione deſperarunt.

Sic viginti proximè abierunt anni ad uſque 1634, quo Merſennus, quùm multas ac præclaras propoſitiones à Robervallio, Regio Matheſeos Profeſſore, ſolvi quotidiè videret, ab eodem ſuæ quoque Trochoidis ſolutionem ſperavit.

Nec verò eum ſua ſpes fruſtrata eſt. Felici enim inquiſitionis ſuæ ſucceſſu uſus Robervallius, Tro-

choidis ſpatium, ſpatii rotæ à quâ deſcribitur, triplum eſſe demonſtravit : ac tùm primùm huic figuræ *Trochoidis* nomen è græco deductum impoſuit, quod gallico *la Roulette*, aptiſſimè reſpondet. Mox ille Merſenno ſolutum à ſe problema, ac triplam illam rationem oſtendit, acceptâ ab eo fide, id per totum adhuc annum iri compreſſum, dum eandem rursùs quæſtionem omnibus Geometris proponeret.

Lætus hoc eventu Merſennus mittit rursùs ad omnes Geometras : rogat ut de integro in eam inquiſitionem incumbant; addit etiam ſolutum à Robervallio problema : ſed de modo nihil adhuc indicat.

Anno & ampliùs elapſo, cùm nullus propoſitæ quæſtioni ſatisfaceret, tertiùm ad Geometras ſcribit Merſennus, ac tunc anno, ſcilicet 1635, rationem Trochoidis ad rotam ut 3 ad 1 eſſe patefecit.

Hoc novo adjuti ſubſidio, problematis demonſtrationem invenerunt duo, inventamque eodem fermè tempore ad Merſennum tranſmiſerunt, alteram Fermatius, Supremæ Toloſanæ Curiæ Senator, alteram Carteſius nunc vitâ functus; utramque, & alteram ab alterâ, & à Robervallii demonſtratione diverſam : ita tamen ut qui eas omnes videat, illicò illius demonſtrationem internoſcat qui primus problema diſſolvit. Ea enim ſingulari quodam caractere inſignitur; ac tam pulchrâ & ſimplici viâ ad veritatem ducit, ut hanc unam naturalem ac rectam

eſſe

esse facilè scias. Et certè eâdem illâ viâ Robervallius ad operiosiores multò circa idem argumentum dimensiones pervenit; ad quas per alias methodos nemo forsan perveniat.

Ita res brevi percrebuit, neminique in totâ Galliâ Geometriæ studiosiori ignotum fuit demonstrationem Trochoidis acceptam Robervallio referendam. Huic autem ille duas sub idem fermè tempus adjunxit; una est solidorum circa basim ejus mensio : altera tangentium inventio, cujus ipse methodum & invenit & statim evulgavit, tam generalem illam ac latè patentem, ut ad omnium curvarum tangentes pertineat. Motuum compositione methodus illa innititur.

Anno autem 1638, Il. de Beaugrand cùm illas de plano Trochoidis demonstrationes collegisset, quarum ad ipsum multa exemplaria pervenerant, itemque egregiam methodum Fermatii *de maximis & minimis :* utrumque ad Galileum misit, tacitis Authorum nominibus. Ac sibi quidem illa nominatim non adscripsit : iis tamen usus est verbis, ut minùs attentè legentibus, quominùs se istorum profiteretur Authorem, solâ demùm impeditus modestiâ videretur. Itaque ad rem paululùm interpolandam, mutatis nominibus, Trochoidem in *Cycloidem* commutavit.

Non multò post Galileus, & ipse de Beaugrand vitâ cesserunt. Successit Galileo Toricellius, nac-

tusque est inter illius manuscripta, quæ omnia ad ipsum delata erant, ista de Trochoide sub Cycloidis nomine problemata ipsius de Beaugrand manu sic exarata quasi eorum Author esset. Cognitâ ergo illius morte Toricellius, abolitam jam temporis spatio rei memoriam ratus, ea omnia securè jam ad se transferri posse arbitratus est.

Itaque anno 1644 Librum edidit, in quo excitatam de Trochoide quæstionem Galileo tribuit, quæ Mersenno debebatur: sibi primam ejus dissolutionem arrogat, quam Robervallii esse certum erat: in quo sanè, ut candoris aliquid Toricellio defuit, sic & aliquid felicitatis. Neque enim sine quorumdam risu exceptus est in Galliâ, qui anno 1644 hoc sibi ascivisset inventum, cujus parens in vivis constanter jam per octo annos Robervallius agnoscebatur, qui quod suum erat non modò compluribus testibus adhuc viventibus posset revincere, sed etiam excusis typo testimoniis, in quibus est quoddam scriptum G. Desargues anno 1640, Augusti mense, Parisiis editum: in quo nominatim habetur Trochoidis problemata Robervallii esse; methodum *de maximis & minimis*, Fermatii.

Ergo hanc injuriam cum ipso Toricellio litteris expostulavit Robervallius; ac severiùs etiam Mersennus, qui tot ipsum argumentis omnigenisque testimoniis, etiam excusis, coarguit, ut veris victus Toricellius, hoc invento cedere, illudque ad Robervallium

Robervallium tranſcribere coactus ſit : quod litteris propriâ manu ſcriptis præſtitit, quæ etiamnum aſſervantur.

Verùm quia paſſim in manibus eſt Toricellii Liber, contrà ejus, ut ita loquar, recantatio paucis innotuit; Robervallio tam parùm de famâ ſuâ extendendâ ſollicito, ut nihil de eâ recantatione emiſerit in vulgus : multi inde in errorem, & ipſemet etiam inductus ſum. Hinc factum eſt ut in prioribus ſcriptis ita ſim de Trochoide locutus, quaſi eam princeps Toricellius invenerit. Quo errore cognito, faciendum duxi, ut quod jure Robervallio debetur, hoc ipſi ſcripto reſtituerem.

Uſus hoc infortunio Toricellius, cùm jam nec dimenſionem ſpatii Cycloidis, nec ſolidi circa baſim primus inveniſſe exiſtimari poſſet ab iis quibus perſpecta rei veritas eſſet, ſolidi circa axem Cycloidis, menſionem aggreſſus eſt. Ibi verò non mediocrem difficultatem offendit : eſt enim illud altiſſimæ cujuſdam & operoſiſſimæ inquiſitionis problema; in quo cùm veram aſſequi non poſſet, veræ proximam ſolutionem miſit; ac ſolidum illud ad ſuum cylindrum eſſe dixit, ſicut 11 ad 18, ratus errorem illum à nemine refelli poſſe. Verùm nihilo fuit hoc etiam in loco felicior; nam Robervallius qui veram ac Geometricam dimenſionem invenerat, non modò ſuum illi errorem, ſed etiam veram problematis reſolutionem indicavit.

Toricellius non multò post fato concessit. At Robervallius solâ simplicis Trochoidis ejusque solidorum dimensione non contentus, omnes omninò Trochoides, sive protractas, sive contractas, inquisitione complexus est, easque excogitavit methodos, quæ ad omnem Trochoidis speciem pertinerent; eâdemque facilitate tangentes darent; plana, & planarum partes dimetirentur; centra gravitatis planorum; ac postremò solida circa basim & circa axem, patefacerent. Quamvis enim integras tantùm Trochoides dimensus sit, tamen ad Trochoidum partes nihil mutata ejus methodus non minùs expeditè adhiberi potest; ut qui illud Robervallio inventum abjudicet, meritò cavillator habendus sit.

Nec verò ea omnia apud se celavit Robervallius, sed scriptis mandata publicè, privatimque, atque etiam in celebri selectorum virorum Matheseos peritissimorum cœtu, per complures dies legit & cupientibus describenda permisit.

Eò perductâ Robervallii industriâ Trochoidis cognitione, ibi per 14 annos substiterat; cùm me ad abdicata pridem Geometriæ studia repetenda improvisa occasio compulit. Tùm verò eas mihi paravi methodos ad dimensionem, & centra gravitatis solidorum, planarum & curvarum superficierum, curvarum item linearum, ut illas vix quicquam effugere posse videretur: atque adeò ut id materiâ vel difficillimâ periclitarer, ad ea quæ de

Trochoide veſtiganda ſupererant aggreſſus ſum; nempè centra gravitatis ſolidorum Trochoidis & ſolidorum ex ejus partibus exurgentium; dimenſionem, & centra gravitatis ſuperficierum omnium iſtorum ſolidorum; ac poſtremò dimenſionem, & centra gravitatis ipſiuſmet lineæ curvæ Cycloidis ejuſque partium.

Ac primùm centra gravitatis ſolidorum & ſemiſolidorum indagavi, & ope meæ methodi aſſecutus ſum; quod mihi ſic arduum eſt viſum quaſvis alias inſiſtentibus vias, ut periculum facturus, an ita res eſſet quemadmodùm mihi perſuaſeram, hanc omnibus Geometris, etiam conſtituto Præmio, inquiſitionem proponere decreverim. Tunc ſcilicet latina illa ſcripta quaquaversùm miſſa vulgavi; ac dum illa de ſolidis problemata inveſtigantur, reliqua ego omnia diſſolvi, quemadmodùm ſub hujus ſcriptionis finem exponam, ubi de Geometrarum reſponſis priùs dixero.

Illa verò reſponſa duplicis ſunt generis, quippe diverſi ſunt ſcribentium genii. Quidam ſoluta à ſe problemata, atque ita jus ſibi in Præmium eſſe contendunt: horum ſcripta legitimo examine propediem excutientur. Alii ad problematum quidem ſolutionem non aſpirant, ſed ſuas tantùm in Cycloidem commentationes exponunt.

Horum in litteris multa præclara, & eximiæ dimetiendi Cycloidis plani rationes habentur, imprimiſque

misque in Epistolis Sluzii, Leodiensis Ecclesiæ Canonici; Richii, Romani; Hugenii, Batavi, qui primus omnium detexit eam plani Trochoidis portionem trilineam, quæ his tribus lineis comprehenditur, scilicet quartâ parte axis ad verticem terminatâ, rectâ ad axem ab initio illius quartæ partis perpendiculariter ordinatâ usque ad Trochoidem, & portione curvæ Trochoidis inter duas prædictas rectas terminatâ, spatio rectilineo dato æqualem esse, atque adeò illi æquale quadratum absolutè exhiberi: quod idem in Epistolâ Wren, Angli, eodem ferè tempore scriptâ reperi.

Cycloidis etiam, ejusque partium, itemque solidorum circa basim tantùm dimensionem accepimus ab Allouero, è Societate Jesu Tolosano; quam, quia ille typis editam misit, attentiùs inspiciens, non sine admiratione cognovi cuncta illa quæ ibi habentur problemata, etsi non alia sint quàm quæ jampridem à Robervallio soluta sunt, tamen ab illo nullâ prorsùs Robervallii factâ mentione, quasi à se primùm soluta, proferri. Quanquam enim diversam secutus est methodum, neminem tamen fugit quàm promptum ac proclive sit jam inventas propositiones novâ specie habitûque producere; tùm ex cognitâ illarum solutione, novas solvendi vias comminisci.

Egi igitur sedulò cum Carcavio, tum ut Allouerum moneret, quod pro suo venditabat, Robervallii

vallii esse, vel nullo negotio ex ejus inventis elici; tum etiam ut viam ipsi explanaret quâ eò Robervallius pervenerat; nam hæc inter honestos viros citra periculum communicantur. Me igitur annitente scriptum est ad Allouerum, illam quæ Robervallium eò perduxerat methodum, cujusdam figuræ quadraturâ niti, ab eodem pridem inventâ, quam figuram delineat circini ductus in recti cylindri superficie, quæ superficies in planum porrecta, mediam cujusdam lineæ efficit partem, quam Robervallius Trochoidis sociam sive gemellam dixit; ex quâ quæ ad axem rectæ ad angulos rectos ducuntur, æquales sunt ductis ex Trochoide, demptis illis quæ ex Rotâ ducuntur. In hoc verò non mediocrem me ab Allouero gratiam iniisse credidi; quandoquidem ipse in suis litteris quæ adhuc habentur, de istius figuræ quam Cycloi-cylindricam appellat, quadraturâ ita loquitur, quasi quæ à suâ notitiâ longè absit & quam nosse vehementer expetat.

Hæc pro Carcavio, cui tam multa scribere non vacabat, quidam ipsius amicus ad Allouerum scripsit, cui vicissim rescripsit Allouerus.

Sed inter missa à Geometris scripta, nullum ipsius Wren scripto præstantius. Nam præter egregiam dimetiendi Cycloidis plani rationem, etiam curvæ & ejus partium cum rectâ comparationem aggressus est. Propositio ejus est, Trochoidem ad suum

ſuum axem eſſe quadruplam; hujus ille enuntiationem ſine demonſtratione miſit; & quia primus protulit, inventoris laudem promeritus eſt.

Nihil tamen de illius honore detractum iri puto, ſi quod veriſſimum eſt dixero, quoſdam è Galliâ Geometras ad quos illa enuntiatio perlata eſt, & in iis Fermatium, ejus, non difficulter demonſtrationem inveniſſe. Dicam inſuper Robervallium nihil ſibi novum afferri planè oſtendiſſe; ſtatim ac enim de eâ propoſitione audiit, integram ejus demonſtrationem continuò ſubjecit, cum pulcherrimâ methodo ad omnium linearum curvarum dimenſionem: quam methodum ipſe dum alia indè graviora conſectaria ſperat eruere, diù occultam habuerat. Et certè eâdem ille methodo uſus erat ad comparandas ſpirales lineas cum parabolicis, quâ de re in operibus Merſenni nonnulla reperias.

Hæc methodus compoſitione item motuum innititur, ut & illa tangentium. Nam ſicuti motûs compoſiti directio tangentem dat, ſic ejus celeritas curvæ longitudinem efficit, quod ſanè nunc primùm reſeratur.

Hæc ſunt quæ in eorum qui Præmium non reſpiciunt ſcriptis animadverſione digniſſima reperi; de cæteris, peractâ demùm diſcuſſione, dicemus; quam quidem primâ Octobris die aperiri conſtitutum erat, ſed ad reditum uſque Carcavii, qui jamjam affuturus nuntiatur, rejicere neceſſe fuit.

Tùm

Tùm verò judicabitur an aliqui quatuor illis legibus ſatisfecerint, quas nos editis menſe Junio ſcriptis promulgavimus.

I. Ut ſolutio Carcavio denuntiata & apud eundem reſcripta ſit intra præſtitutum tempus, nimirùm primum Octobris diem; *qui intra* (hæc noſtra verba) *præſtitutum tempus D. de Carcavi ſignificaverit.*

II. Ut illa denuntiatio inſtrumento publico fiat, ad tollendam fraudis ſuſpicionem.

III. Ut demonſtratio compendiaria, vel ſaltem certi cujuſdam casûs calculus offeratur, ex quo intelligi poſſit an qui eum mittit jam tùm veram problematis ſolutionem tenere credendus ſit: *Aut certè ad confirmandam aſſertionis veritatem casûs quem mox deſignabimus calculum miſerit.* At miſſo calculo ſolo, tunc de vero aut falſo omninò ſtatuendum veniet, prout calculus verus vel falſus judicatus fuerit.

IV. Ut deindè per otium, omnium propoſitorum caſuum demonſtratio mittatur, eaque vera & omnibus partibus Geometrica ab iis judicetur, quos Carcavius arbitros aſciverit. Si quis tamen error calculi in integras illas omnium caſuum demonſtrationes irrepſerit, eum putavimus condonandum: quia calculi neceſſitas ceſſat, ubi adeſt demonſtratio, adeòque tunc ſemper ignoſcendus eſt error in calculo interveniens.

Si duo his conditionibus ſatisfecerint, primus

ſic

ſic primum Præmium, ſecundus ſecundum accipiet; ſi unus modò, ſolus utrumque obtinebit. At qui vel uni illarum legum defuerit, excidet ille quidem Præmio, non item honore, quem pro ſcriptorum quæ ille publicare poterit pretio, meritum conſequetur; non enim ullas diſpenſando honori leges appoſui, qui prorsùs mei juris non erat; ſed tantùm Præmiis, quorum mihi plena & ſoluta poteſtas fuit.

Quòd ſi, re legitimè diſcuſsâ, nullus problemata diſſolviſſe reperiatur, tunc meas ipſe ſolutiones proferam, uti me in ſcriptis meis, poſtquam præſtituta ad id prima Octobris dies adveniſſet, facturum eſſe pollicitus ſum. Itaque calculum meum jam evulgare cœpi, multiſque illum fide digniſſimis perſonis tradidi manuſcriptum: & inter alios Carcavio, Robervallio, D. Galois, Regio Tabellioni Pariſiis degenti, ac compluribus aliis Galliæ viris dignitate & eruditione præſtantibus, qui diem accepti à me calculi diligenter annotarunt.

Hunc verò propterea ſtatim edendum non cenſui, ut ſi qui in ipsâ diſcuſſione eum inveniſſe reperti ſint, id ab ipſis ante vulgatam ſolutionem meam factum prædicem: ſin minùs, à nemine inventa publicabo.

Quin etiam, quò tota Trochoidis natura pernoſcatur, ſequentia adjungam problemata, quorum nonnulla mihi videntur non minùs ad ſolvendum difficilia,

difficilia, quàm quæ huc uſque propoſita ſunt.

I. Puncto *Z* dato quocumque in Trochoide ſimplici, invenire centrum gravitatis curvæ *ZA* inter aſſignatum punctum *Z* & verticem *A* interceptæ.

II. Invenire dimenſionem ſuperficiei curvæ ab eâdem curvâ *ZA*, deſcriptæ, dum ipſa *ZA* circumvolvitur, vel circa baſim, qui caſus facilis eſt, vel circa axem: & ſive converſio proponatur integra, ſive dimidiata, vel ejus quæcumque pars.

III. Omnium prædictarum ſuperficierum à curvâ *ZA* deſcriptarum, tam partium, quàm integrarum, centra gravitatis aſſignare.

Et hoc quidem tertium omnium inventu difficillimum mihi extitit. Eſto ergo idem ſolum ac unicum præ cæteris ad diſcutiendum propoſitum.

In omnibus autem illis problematibus ſupponitur circuli quadratura, ubicumque ſupponenda fuit.

Hæc ſunt quæ de naturâ Trochoidis retegendâ reſtabant, quorum ſolutionem ad ultimum uſque Decembris diem hujus anni 1658 comprimemus: ut ſi quis ea intra id tempus invenerit, inventionis gloriâ potiatur. At hoc elapſo, ſi nemo attulerit, ipſimet afferemus: atque ipſam etiam generalem dimenſionem omnium linearum curvarum cujuſvis Trochoidis vel protractæ vel contractæ, quæ non rectis lineis, ſed ellipſibus æquales oſtendentur.

Hîc noſtræ in hujus lineæ naturâ rimandâ perveſtigationis

vestigationis limes fuit; quare ut totam hanc narrationem in summam contraham:

Primus Mersennus, hanc lineam in naturâ rerum advertit, nec tamen ejus naturam pervidere valuit.

Primus Robervallius, & naturam retexit, & tangentes assignavit, ac plana & solida dimensus est; & centra gravitatis, tum plani, tum plani partium, invenit.

Primus Wren, lineam curvam dimensus est.

Ego denique primus, solidorum, ac semisolidorum Trochoidis & ejus partium, tum circa basim, tum circa axem, centra gravitatis inveni. Primus, ipsiusmet lineæ centrum gravitatis. Primus, dimensionem superficierum curvarum prædicta solida, semisolida, eorumque partes comprehendentium. Primus, centra gravitatis talium superficierum integrarum & diminutarum. Ac primus, dimensionem omnium linearum curvarum cujusvis Trochoidis, tam protractæ, quàm contractæ.

10 *Octobris* 1658.



RÉCIT



RÉCIT

De l'examen & du jugement des Écrits envoyés pour les Prix proposés publiquement sur le sujet de la Roulette, où l'on voit que ces Prix n'ont point été gagnés, parce que personne n'a donné la véritable solution des Problêmes.

L'ABSENCE de M. de Carcavi ayant retardé l'examen des Écrits qu'il a reçus sur les problêmes proposés touchant la Roulette; aussi-tôt qu'il fut de retour, il assembla, le 24 Novembre, des personnes très-savantes en Géométrie, lesquelles il pria de vouloir examiner ces Écrits : & leur dit qu'encore qu'on lui en eût envoyé plusieurs, il y en avoit peu néanmoins à examiner, parce que la plupart avoient été retirés par les Auteurs qui avoient prié qu'on ne les soumît pas à l'examen, & qu'ainsi il ne lui en restoit que de deux personnes, qu'il ne voulut point nommer. Que l'un de ces Écrits consistoit en un simple calcul d'un cas proposé, lequel lui fut envoyé signé par l'Auteur (1) en date du 15 Septembre 1658, & porté chez

(1) Le P. Lallouere, Jésuite. Voyez le Discours imprimé à la tête du premier Volume de cette Collection.

lui, le 23, par une perſonne qui demanda qu'on marquât ſur le paquet le jour de la réception, en diſant qu'il étoit queſtion d'un Prix; ce qui fut fait. Mais qu'il reçut incontinent après des Lettres du même Auteur du 21 Septembre, par leſquelles il mandoit que ſon calcul étoit faux : en quoi il perſiſta par d'autres des mois de Septembre, d'Octobre & de Novembre, ſans néanmoins envoyer d'autres calculs, mais déclarant auſſi qu'il ne prétendoit point aux Prix deſtinés à ceux qui auroient réſolu les problêmes dans le temps déterminé. De toutes leſquelles choſes M. de Carcavi conclut qu'encore que cet Auteur ne lui eût pas mandé qu'on ne ſoumît point ſon calcul à l'examen; il jugeoit néanmoins que cela n'étoit pas néceſſaire, un Auteur étant le meilleur juge des défauts de ſon propre Ouvrage : de ſorte qu'on ne fut pas obligé d'y apporter beaucoup d'attention; & même on vit d'abord qu'il en falloit peu pour en juger, parce que les meſures qui y ſont données, ſont différentes des véritables, chacune preſque de la moitié; & que dans un ſolide aigu par une extrémité, & qui va toujours en s'élargiſſant vers l'autre, il aſſigne le centre de gravité vers l'extrémité aiguë, ce qui eſt viſiblement contre la vérité. On jugea auſſi que ce calcul ayant été envoyé ſeul, pour faire juger ſelon qu'il ſeroit vrai ou faux, que l'Auteur avoit ou n'avoit pas les mé-

thodes

thodes pour la résolution des problêmes, au temps qu'il l'avoit envoyé; les erreurs qui s'y trouvoient, lui donnoient l'exclusion, & ne devoient pas être mises au rang de ces autres simples erreurs de calcul, que l'Anonyme avoit bien voulu excuser à ceux qui enverroient en même-temps les démonstrations ou les méthodes entieres & véritables, auxquelles si les calculs ne se trouvoient pas conformes, il paroîtroit assez que ces erreurs ne seroient que de calcul & non pas de méthode; sur quoi l'Anonyme avoit dit, *salvo semper errore calculi :* au lieu que quand le calcul est seul, on ne sauroit juger si l'erreur qui s'y trouve, est de méthode ou de calcul, dont aussi l'Anonyme n'a dit en aucune maniere, *salvo errore calculi;* & qu'il y a apparence que c'est une erreur de méthode, lorsqu'ayant reconnu que le calcul est faux, on n'en envoie ensuite aucun autre. Mais on jugea en même-temps qu'il falloit laisser à l'Auteur de ce calcul l'avantage d'avoir reconnu le premier sa faute, puisqu'il l'avoit en effet écrit incontinent après l'avoir envoyé.

M. de Carcavi dit ensuite qu'il ne restoit donc à examiner que l'Écrit d'un autre Auteur (1), daté du 19 Août, style ancien, & signé par un Notaire le même jour, où l'Auteur prétend donner une mé-

(1) Wallis. Voyez le Discours déja cité.

thode entiere pour la résolution de tous les problêmes, avec les solutions & démonstrations, en cinquante-quatre articles. Que le paquet en fut délivré à Paris au commencement de Septembre, & qu'il avoit reçu depuis trois autres Lettres du même Auteur; l'une du 3 Septembre, par laquelle il corrige quelques erreurs qu'il avoit remarquées dans son Écrit, & il ajoute même qu'*il n'est pas encore pleinement assuré du reste, ne l'ayant pas, jusques à ce temps-là, assez exactement examiné*; l'autre du 16 Septembre, par laquelle il ne fait qu'avertir de l'envoi des premieres; & la derniere du 30 Septembre, où il dit en général, & sans rien marquer en particulier, qu'outre les corrections qu'il a envoyées, il peut y en avoir d'autres à faire: par où il semble être en défiance de ses solutions; & ce qui le marque encore davantage, est qu'il demande, par la même Lettre, *si on ne se contenteroit pas d'une solution approchante de la véritable.* Or il n'y a gueres d'apparence qu'une personne qui croiroit avoir donné les solutions exactes & géométriques, demandât si on ne se contenteroit pas des approchantes; mais néanmoins comme il ne révoque pas les siennes en propres termes, quoiqu'il y ait eu beaucoup de temps pour le faire, s'il l'eût voulu, on jugea qu'on ne pouvoit pas sur cela refuser d'examiner des Écrits envoyés avec acte public, & qui n'avoient pas été

expressément

expreſſément révoqués : vu même qu'il dit par une de ſes Lettres, que *les défauts qui pouvoient être dans ſes ſolutions, & qu'il appelle des erreurs de calcul, n'empêchoient pas, ſelon ſon avis, que la difficulté des problêmes ne fût ſuffiſamment ſurmontée.*

On s'y appliqua donc, & on jugea que, ni dans ſon premier Écrit, ni dans ſes corrections, il n'avoit trouvé, ni la véritable dimenſion des ſolides autour de l'axe, ni le centre de gravité de la demi-Roulette, ni de ſes parties (ce qui avoit été réſolu depuis long-temps par M. de Roberval), ni aucun des centres de gravité des ſolides, ni de leurs parties, tant autour de la baſe qu'autour de l'axe, qui étoient proprement les ſeuls problêmes propoſés par l'Anonyme avec la condition des Prix, comme n'ayant encore été réſolus par perſonne; & l'on trouva qu'outre les erreurs qu'il avoit corrigées par ſa Lettre, il en avoit laiſſé d'autres, & qu'il y en avoit de nouvelles dans ſa correction même, leſquelles ſe rencontrent dans preſque tous les articles, depuis le trente juſqu'au dernier.

On jugea auſſi que ces erreurs n'étoient point de calcul, mais de méthode, & proprement des paralogiſmes : parce que les calculs qu'il y donne, ſont très-conformes à ſes méthodes, mais que ces méthodes mêmes ſont fauſſes. Et on remarqua qu'une de ſes erreurs les plus conſidérables, conſiſte en ce

qu'il raiſonne de certaines ſurfaces indéfinies en nombre, & qui ne ſont pas également diſtantes entre elles, de même que ſi elles l'étoient; ce qui fait qu'ayant à meſurer la ſomme de ces ſurfaces, ou la ſomme des forces de leurs poids (à quoi ſe réduit toute la difficulté & tout le ſecret), il n'en trouve que de fauſſes meſures, ſes méthodes n'allant point aux véritables.

C'eſt ce qui le mene à comparer, comme nombre à nombre, des quantités qui ſont entre elles, comme des arcs de cercle au diametre, ou comme leurs puiſſances; & c'eſt ainſi que voulant donner la raiſon du ſolide de la Roulette à l'entour de l'axe à la ſphere de ſa roue (ou de ſon cercle générateur), après l'avoir donné, comme 23 à 2 dans ſon premier Écrit, il la donne, comme 37 à 4 dans ſa correction, par un calcul très-conforme à ſes méthodes; au lieu que la véritable raiſon, que M. de Roberval a donnée de ce même ſolide à ſon cylindre de même hauteur & de même baſe, eſt *comme les trois quarts du quarré de la demi-baſe de la Roulette, moins le tiers du quarré du diametre de la Roue, au quarré de cette demi-baſe.*

Il n'eſt pas moins éloigné du véritable centre de gravité des ſolides à l'entour de la baſe, & encore plus de ceux à l'entour de l'axe, à cauſe d'un nouveau paralogiſme qu'il y ajoute, en prenant mal les centres de gravité de certains ſolides élevés perpendiculairement

diculairement ſur des trapèzes, dont il ſe ſert preſque par-tout, & coupés par des plans qui paſſent par l'axe. Et on jugea que les erreurs de ces Écrits donnoient encore ſans difficulté l'excluſion.

Le jugement de ces Écrits ayant été ainſi arrêté, il fut conclu que puiſqu'on n'avoit reçu aucune véritable ſolution des problêmes que l'Anonyme avoit propoſés, dans le temps qu'il avoit preſcrit; il ne devoit à perſonne les Prix qu'il s'étoit obligé de donner à ceux dont on auroit reçu les ſolutions dans ce temps; & qu'ainſi il étoit juſte que M. de Carcavi lui remît les Prix qu'il avoit mis en dépôt entre ſes mains, puiſqu'ils n'avoient été gagnés par perſonne; ce qui a été exécuté.

Paris, le 25 Novembre 1658.





SUITE DE L'HISTOIRE DE LA ROULETTE:

Où l'on voit le procédé d'une personne (1) *qui avoit voulu s'attribuer l'invention des Problêmes proposés sur ce sujet.*

LEs matieres de Géométrie sont si sérieuses d'elles-mêmes, qu'il est avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre un peu divertissantes. L'Histoire de la Roulette avoit besoin de quelque chose de pareil, & fût devenue languissante, si on n'y eût vu autre chose, sinon que j'avois proposé des problêmes avec des Prix, que personne ne les avoit gagnés, & que j'en eusse ensuite donné moi-même les solutions, sans aucun incident qui égayât ce récit, comme est celui que l'on va voir dans ce discours.

Une personne, que je ne nomme point, ayant appris qu'entre les problêmes que M. de Roberval avoit résolus autrefois, la dimension du solide de la Roulette à l'entour de l'axe, étoit sans comparaison le plus difficile; il fit dessein, après avoir reçu l'énonciation de ce problême & les moyens par

(1) Le P. Lallouere.

par lesquels M. de Roberval y étoit arrivé, de se faire passer pour y être aussi venu de lui-même, & par ses méthodes particulieres : espérant que cette estime lui seroit assez glorieuse, quoique ce ne fût que vingt-deux ans après. Mais la maniere dont il s'y prit, détruisit sa prétention, & fit voir trop clairement qu'il n'avoit point de part de lui-même à cette invention. Car l'énonciation qu'il envoya, & qu'il vouloit faire passer pour sienne, étoit accompagnée de celle de M. de Roberval, dont elle ne différoit que de termes : comme qui diroit, *le rectangle de la base & de la hauteur*, au lieu de dire, *le double de l'espace du triangle*. Et il reconnoissoit dans la même Lettre, qu'une autre énonciation qu'il avoit donnée auparavant, étoit fausse ; mais qu'il s'assuroit que cette derniere étoit véritable, par cette raison qu'elle étoit conforme à celle de M. de Roberval.

Ce discours fit juger le contraire de ce qu'il vouloit : puisque, s'il eût eu en main des méthodes & des démonstrations géométriques de la vérité, ce n'eût pas été par cette conformité qu'il se fût assuré de sa solution, mais qu'il en eût jugé plutôt, & de celle de M. de Roberval même, par ses propres preuves. On connut donc qu'il n'avoit, en cela, de lumiere qu'empruntée ; & ainsi on s'étonna de la priere qu'il faisoit en même-temps, qu'on s'assurât & qu'on crût sur sa parole qu'il étoit ar-

rivé

rivé à cette connoiſſance, de ſoi-même, & par la ſeule balance d'Archimede. A quoi on répondit que ſon énonciation étoit véritable & très-conforme à celle de M. de Roberval; mais qu'il étoit bon qu'il envoyât ſes méthodes pour voir ſi elles étoient différentes.

Il ne ſatisfit point ſur cette demande, mais continua à prier qu'on s'aſſurât ſur ſa parole, qu'il avoit trouvé ce problême par la balance d'Archimede, ſans mander en aucune ſorte ſes moyens. Ce qui ne fit que trop connoître ſon deſſein, & on le lui témoigna aſſez clairement par pluſieurs Lettres: mais il y demeura ſi ferme, que, quand il vit l'*Hiſtoire de la Roulette* imprimée, ſans qu'il y fût en parallele avec M. de Roberval, il ſe plaignit hautement de moi, comme ſi je lui euſſe fait une extrême injuſtice.

Sa plainte me ſurprit, & je lui fis mander que, bien loin d'avoir été injuſte en cela, j'aurois cru l'être extrêmement d'ôter à M. de Roberval l'honneur d'avoir ſeul réſolu ce problême: n'ayant aucune marque que perſonne y eût réuſſi. Que je n'avois point d'intérêt en cette affaire; mais que je devois y agir équitablement, & donner à tous ceux qui avoient produit leurs inventions ſur ce ſujet, ce qui leur étoit dû. Que s'il avoit montré qu'il fût en effet arrivé à cette connoiſſance ſans ſecours, je l'aurois témoigné avec joie: mais que

n'ayant

n'ayant rien fait d'approchant, & n'y ayant personne qui ne pût, aussi-bien que lui, donner une énonciation déguisée, & se vanter de l'avoir trouvée soi-même par la balance d'Archimede, j'aurois failli de donner à M. de Roberval un compagnon dans ses inventions.

Ces raisons ne le satisfirent point : il persista à écrire qu'on ne lui rendoit pas justice ; de sorte qu'on fut obligé de lui mander plus sévérement les sentiments qu'on en avoit. On lui fit donc entendre que dès qu'on a vu une invention publiée, on ne peut persuader les autres qu'on l'auroit trouvée sans ce secours, ni s'en assurer soi-même, parce que cette connoissance change les lumieres & la disposition de l'esprit, qui ne sont plus les mêmes qu'auparavant ; & quand on auroit pris de nouvelles voies, ce n'en seroit pas une marque, parce qu'on sait qu'il est aussi facile de réduire à d'autres méthodes ce qui a été une fois découvert, qu'il est difficile de le découvrir la premiere fois. Qu'ainsi tout l'honneur consiste en la premiere production ; que toutes les autres sont suspectes ; & que c'est pour éviter ce soupçon, que les personnes qui prennent les choses comme il faut, suppriment leurs propres inventions, quand ils sont avertis qu'un autre les avoit auparavant produites, quelques preuves qu'il y ait qu'ils n'en avoient point eu de connoissance : aimant bien mieux se priver de ce petit

avantage,

avantage, que de s'exposer à un reproche si fâcheux, parce qu'ils savent qu'il n'y a point assurément de deshonneur à n'avoir point résolu un problême; qu'il y a peu de gloire à y réussir; & qu'il y a beaucoup de honte à s'attribuer des inventions étrangeres.

La moindre de ces raisons & de toutes les autres qu'on lui écrivit, eût été capable, ce me semble, de faire renoncer à tous les problêmes de la Géométrie, ceux qui sont au-dessus de ces matieres : mais pour lui il n'en rabattit rien de sa prétention, & il persiste encore maintenant. Voilà quel a été son procédé sur les problêmes de M. de Roberval, où j'admirai à quoi cette fantaisie de l'honneur des Sciences porte ceux qui veulent en avoir, & qui n'ont pas de quoi en acquérir d'eux-mêmes.

Mais il n'en demeura pas là; & pendant qu'on l'exhortoit à quitter cette entreprise, il s'engagea à une autre, qui fut de se vanter d'avoir résolu tous les problêmes que j'avois proposés publiquement : en quoi il se trouva dans un étrange embarras, & bien plus grand qu'auparavant; car, dans sa premiere prétention, il avoit en main les énonciations de M. de Roberval, & pouvoit ainsi en produire de semblables & véritables, en assurant qu'il y étoit arrivé par des moyens qu'il vouloit tenir secrets : au lieu que dans sa seconde prétention, il ne pouvoit au plus avoir que l'énonciation

d'un ſeul cas, que j'ai communiquée à quelques perſonnes, & qui n'eſt peut-être pas venue juſques à lui : de ſorte qu'étant dans l'impuiſſance entiere de produire toutes les énonciations dont il ſe vantoit, ne pouvant y arriver, ni par ſa propre invention, ni par communication, il ſe mit dans la néceſſité de ſuccomber à tous les défis qu'on lui a faits d'en faire paroître aucune, & par ce moyen en état de nous donner tout le divertiſſement qu'on peut tirer de ceux qui s'engagent en de pareilles entrepriſes, comme cela eſt arrivé en cette ſorte.

Ce fut dans le mois de Septembre qu'il commença à écrire qu'il avoit réſolu tous ces problêmes : on me le fit ſavoir, & je fus ſurpris de ſa petite ambition ; car je connoiſſois ſa force & la difficulté de mes problêmes, & je jugeois aſſez, par tout ce qu'il avoit produit juſqu'ici, qu'il n'étoit pas capable d'y arriver. Je m'aſſurai donc, ou qu'il s'étoit trompé lui-même, & qu'en ce cas il falloit le traiter avec toute la civilité poſſible, s'il le reconnoiſſoit de bonne foi, ou qu'il vouloit nous tromper, & attendre que j'euſſe publié mes problêmes pour ſe les attribuer enſuite, & qu'alors il falloit en tirer le plaiſir de le convaincre, qui étoit en mon pouvoir, puiſque la publication de mes problêmes dépendoit de moi. Je témoignai donc mon ſoupçon, & je priai qu'on obſervât ſes démarches. La premiere qu'il fit, fut d'envoyer,

avant que le terme des Prix fût expiré, un calcul d'un cas proposé, si étrangement faux en toutes ses mesures, que lui-même le révoqua par le premier Courier d'après : mais bien loin de le faire avec modestie, il y agit avec la fierté du monde la plus plaisante & la moins fine; car il manda qu'à la vérité son calcul étoit faux, mais qu'il en avoit un autre bien véritable, & même de tous les cas généralement, avec toutes les démonstrations écrites au long en l'état qu'il vouloit les faire paroître, & toutes prêtes à donner à l'Imprimeur; mais que néanmoins il ne vouloit pas les produire avant que j'eusse imprimé les miennes, comme je devois le faire en ce temps-là, qui étoit le commencement d'Octobre.

Je l'entendis assez, & il ne fut pas difficile à tout le monde de voir que c'étoit justement ce que j'avois prédit. On résolut donc de le pousser à l'extrémité; & pour montrer parfaitement qu'il ne pouvoit rien donner qu'après moi, je promis publiquement dans l'Histoire de la Roulette, de différer de trois mois, savoir, jusqu'au premier Janvier, la publication de mes problêmes; au lieu qu'il s'étoit attendu que je les donnerois au premier Octobre, comme je l'eusse fait en effet sans cela.

Cette remise, qui lui eût été si favorable, s'il eût eu véritablement ses solutions, trahit son mystere, & lui devint insupportable, parce qu'il ne

les

les avoit pas, & qu'il voyoit bien qu'on alloit juger de lui par l'usage qu'il feroit de ce délai. Cela le mit donc en colere ; & il fut si naïf dans sa mauvaise humeur, qu'il le témoigna franchement par ses Lettres, où il mandoit que c'étoit une chose étrange, que je voulusse ainsi sans raison, différer de trois mois entiers la publication de mes solutions. A quoi on lui répondit, qu'il avoit le plus grand tort du monde de s'en plaindre ; que rien ne lui étoit plus avantageux ; qu'il devoit bien en profiter, & s'assurer par-là l'honneur de la premiere production, pendant que je m'étois lié les mains moi-même, & que si son Ouvrage étoit prêt, il pouvoit le faire paroître deux ou trois mois avant aucun autre. Qu'ainsi étant le premier de loin, il n'y auroit que lui dont il fût certain qu'il ne tînt ses inventions de personne : & enfin on lui dit alors, en sa faveur, tout ce qu'on avoit dit contre lui en l'autre occasion.

Ces raisons étoient les meilleures du monde : mais il en avoit une invincible, qui le forçoit à ne point y consentir, & à mander encore qu'il étoit résolu de ne rien produire qu'après moi. Cette réponse fut reçue de la maniere qu'on peut penser, & on délibéra là-dessus de ne plus le flatter : de sorte qu'on lui écrivit nettement, que son procédé n'étoit pas soutenable ; qu'on lui donnoit avis de la défiance où l'on étoit de lui ; qu'après avoir don-

né un faux calcul, il étoit engagé d'honneur de se hâter de donner le véritable, s'il l'avoit; mais que de demeurer si long-temps sans le faire, après tant de défis, & de ne point vouloir en produire avant que d'avoir vu les solutions d'un autre, c'étoit montrer aux moins clair-voyants qu'il n'en avoit point; & qu'ainsi on lui déclaroit pour la derniere fois, qu'il devoit envoyer avant le premier Janvier, ou ses méthodes, ou ses calculs : & s'il ne vouloit pas les donner à découvert, qu'au moins il les donnât en chiffre; que cet expédient ne pouvoit être refusé, sous quelque prétexte que ce fût; que c'étoit la maniere la plus sûre & la plus ordinaire dont on se servît en ces rencontres, pour s'assurer l'honneur d'une invention, sans que personne pût en profiter; que s'il acceptoit cette condition, il n'avoit qu'à envoyer son chiffre à un de ses amis dans le mois de Décembre; que le mien étoit déja fait, & qu'on les produiroit ensemble; qu'ensuite son explication & la mienne paroîtroient aussi ensemble; & que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit contenir la vérité, seroit reconnu pour avoir résolu les problêmes de lui-même & sans secours; mais que celui dont le chiffre expliqué se trouveroit faux, seroit exclus de l'honneur de l'invention, sans pouvoir ensuite y prétendre, après avoir vu les solutions de l'autre à découvert.

Voilà

Voilà l'expédient décisif qu'on lui proposa; & on lui ajouta, le plus sévérement que la civilité peut le permettre, que s'il le refusoit, il paroîtroit à toute la terre qu'il n'avoit point ces solutions; qu'autrement il ne céderoit pas à un autre l'avantage de la premiere invention; & que si ensuite de ce refus, & après que j'aurois produit les miennes, il entreprenoit d'en produire aussi, il ne passeroit que pour les avoir prises de moi, & acquerroit toute la méchante opinion que méritoit un procédé de cette nature. On attendit la réponse à tout cela, comme devant servir de derniere preuve de l'esprit avec lequel il agissoit; & on la reçut peu de temps après, qui portoit ce que j'avois tant prédit, qu'il ne vouloit donner, ni discours, ni chiffre, ni autre chose, ni accepter aucune condition; qu'il vouloit voir mes inventions publiées & à découvert, avant que de rien produire; qu'il ne me disputoit, ni les Prix, ni l'honneur de la premiere invention; qu'il ne prétendoit autre chose, sinon de voir mes problêmes, & en publier ensuite de semblables; que c'étoit sa derniere résolution, & qu'il ne vouloit plus parler sur ce sujet.

Cette réponse, la plus claire du monde, fit voir son impuissance aussi parfaitement qu'il étoit possible, à moins que de la confesser en propres termes, ce qu'il ne falloit pas espérer de lui. Et ainsi on jugea que ce refus absolu de donner, ni dis-

cours, ni chiffre, le convainquoit pleinement; & qu'il me ſeroit inutile de remettre encore à un nouveau terme, la publication de mes problêmes, puiſqu'ayant déclaré qu'il ne produiroit rien qu'après moi, ſes remiſes ſuivroient toujours les miennes, & que la choſe iroit à l'infini. Je crus donc qu'il ne falloit point différer après le terme du premier Janvier, & qu'alors je devois, à ma premiere commodité, terminer cette affaire, qui a aſſez duré, & donner à tant de perſonnes ſavantes qui ſe ſont plues à ces queſtions, la ſatisfaction qu'ils attendent. Mais il me ſembla qu'il étoit bon de faire voir ce récit par avance, afin qu'après que j'aurois donné mes ſolutions, s'il arrivoit qu'il fût ſi mal conſeillé que de les déguiſer, tout le monde connût la vérité. C'eſt la ſeule choſe que j'ai voulu faire par ce diſcours, & non pas décrier ſa perſonne : car je voudrois le ſervir, & je reſpecte ſa qualité de tout mon cœur. Auſſi j'ai caché ſon nom; mais s'il le découvre après cela lui-même, pour s'attribuer ces inventions, il ne devra ſe prendre qu'à lui de la mauvaiſe eſtime qu'il s'attirera. Car il doit bien s'aſſurer que ſes artifices ſeront parfaitement connus & relevés.

Et qu'il n'eſpere pas s'en ſauver, par l'atteſtation d'un ami, qu'il pourroit mendier, qui certifieroit avoir vu ſon Livre en manuſcrit avant le premier Janvier : ce n'eſt pas ainſi qu'on agit en

ces

ces matieres, où la ſeule publication fait foi. S'il n'étoit queſtion que d'un ſimple calcul de trois lignes, dont on eût donné les copies à pluſieurs perſonnes, qui ſe trouvaſſent toutes conformes, ce ſeroit quelque choſe. Mais quand il s'agit d'un Livre entier, & de cent propoſitions de Géométrie avec leurs calculs, où il n'y a rien de ſi facile que de mettre un nombre ou un caractere pour un autre : c'eſt une plaiſante choſe de prétendre que ce ſeroit aſſez de produire le certificat d'un ami, qui atteſteroit d'avoir vu ce manuſcrit un tel jour ; & principalement, ſi on avoit de quoi montrer que cet ami ne l'auroit, ni lu, ni examiné en donnant ce certificat. Il n'y a perſonne qui dût prétendre que ſon autorité pût arrêter ainſi tous les doutes : on ne croit en Géométrie que les choſes évidentes. Je lui ai donné ſix ou ſept mois pour en produire : il ne l'a point fait ; & il lui a été auſſi impoſſible de le faire, qu'il ſeroit aiſé de déguiſer les vraies ſolutions quand elles ſeront une fois publiées.

Mais on ne doit pas être ſurpris de ſon procédé en cette rencontre, ni de ce qu'il avoit entrepris ſur les problêmes de M. de Roberval : car il agit de même en toutes occaſions. Et il y a pluſieurs années qu'il ſe vante, & qu'il répete ſouvent qu'il a trouvé la Quadrature du cercle, & qu'il la donnera à ſon premier loiſir, réſolue en deux manieres différentes, & auſſi celle de l'hyperbole : d'où l'on peut juger s'il

y a ſujet de croire ſur ſa parole, qu'il ait les choſes dont il ſe vante.

Paris, ce 12 Décembre 1658.

Paris, le 20 Janvier 1659.

DEPUIS que cette piece a été faite, j'ai publié mon Traité de la Roulette; & le premier jour de Janvier j'en envoyai le commencement à cette même perſonne dont j'ai parlé dans cet Écrit, afin qu'il y vît le calcul du cas que j'avois propoſé, & où il s'étoit trompé : ſur quoi il n'a pas manqué de dire que c'étoit juſtement ainſi qu'il avoit réformé le ſien; & il s'eſt haſardé de plus de faire davantage, & d'envoyer les calculs de quelques autres cas dans une feuille imprimée du 9 Janvier, où il aſſure qu'elle eſt toute conforme au manuſcrit qu'il en avoit donné depuis long-temps à des gens de croyance, pour ſervir de preuve qu'il avoit tout trouvé ſans moi. Mais outre que quand ſes calculs ſeroient juſtes, cela lui ſeroit maintenant inutile, après la lumiere que ce que je lui ai envoyé a pu lui donner : il ſe trouve de plus que ceux de ſes calculs que je viens d'examiner en les recevant, ſont tellement faux, que cela eſt viſible à l'œil; & entre autres, le centre de gravité du ſolide autour de l'axe, qu'il place tout contre le quart de l'axe. Il ne donne pas moins mal à propos la diſtance entre

entre l'axe & le centre de gravité du demi-ſolide de la partie ſupérieure de la Roulette autour de l'axe. De ſorte que cette piece qu'il dit être ſi conforme à ſon manuſcrit, & laquelle il vient de produire pour ſoutenir ſa prétention, eſt ce qui lui ferme abſolument la bouche, & qui montre le mieux le beſoin qu'il avoit de voir mes ſolutions & mes méthodes, que je lui ai toutes envoyées maintenant, ſur leſquelles il lui ſera auſſi facile de corriger encore ſes nouvelles fautes après l'avis que je lui en donne, & de trouver les véritables calculs, qu'il lui ſeroit inutile de ſe les attribuer déſormais.





HISTORIÆ TROCHOIDIS
SIVE CYCLOIDIS CONTINUATIO:

In quâ videre est cujusdam viri machinamenta qui se Autorem Problematum super hac re propositorum erat professus.

TANTUM in rebus geometricis severitatis inest, ut peropportunum sit aliquid intervenire, quo possit earum asperitas aliquantulùm mitigari. Nescio quid hujusmodi Trochoidis Historia desiderabat, quæ sensim elanguisset, si nihil aliud lectores ex eâ didicissent, nisi quædam à me problemata ad explicandum proposita, certaque explicaturis Præmia constituta: quæ cùm nemo esset adeptus, tandem eorum solutionem à meipso proditam. Hac narratione quid tristius, si nullus eam jocularis eventus hilarasset? Percommodè igitur accidit is quem hîc exposituri sumus.

Audierat quidam, cujus nomen à me tacebitur, omnium quæ olim Robervallio dissoluta erant problematum longè illud difficillimum esse, quo solidum circa Trochoidis axem dimensus est. Ergo cùm & hujus problematis solutionem, & vias quibus ad eam pervenerat Robervallius accepisset, sibi quoque

quoque ſolutionis iſtius gloriam aſſerere meditatus eſt, quaſi ſuâ ipſius induſtriâ repertæ: magnum aliquid ratus ſi ad hanc laudem ante annos viginti duos ab altero præceptam ſocius accederet. Sed conſilium ſuum ipſe pervertit, tam rudibus artificiis rem aggreſſus, ut omnibus palam foret, nullam hujus inventionis partem ipſi deberi. Quam enim protulit enuntiationem, quamque adoptabat in ſuam, Robervallianæ ſimul conjunctam emiſit à quâ ſolis duntaxat vocibus diſtinguebatur, ut ſi dixeris, rectangulum ex baſi & altitudine, pro eo quod eſt, duplicatum trianguli ſpatium. In hac porrò Epiſtolâ fatebatur ſe falſam quidem enuntiationem ante id temporis evulgaſſe, de hujus autem poſterioris veritate confidere ſe, quia Robervallianæ congruebat.

Hæc in hominum mentes planè contrariam de illo opinionem injicere. Nam ſi certæ quædam methodi, ac Geometricæ demonſtrationes ipſi fuiſſent in manibus, an ille de ſolutione ſuâ ex hac tantùm ſimilitudine certior factus foret? ac non potiùs de ſolutione tum ſuâ, tum etiam Robervallii ex propriis rationibus judicaret? Patuit ergo virum alieno lumine uſum, non ſuo: nec ſatis juſtè viſus eſt poſtulare, ut ipſi demùm affirmanti crederemus ſuâ ſe operâ uniuſque Archimedis bilancis auxilio ad eam cognitionem eſſe perductum. Undè & reſponſum eſt de prolatæ ab ipſo enuntiationis veritate,

deque illius cum Robervallianâ congruentiâ dubitare quidem neminem, non alienum tamen fore, si suas quoque methodos proferret quò facilius cerneretur, an propriæ ipsi ac peculiares essent.

Nil ille ad ista postulata reponere, de methodis suis nullam mentionem facere, nec minùs tamen enixè instare, ut ipsum solâ Archimedis bilance usum omnes sibi persuaderent. Quorsùm hæc tenderent satis superque innotuit, nec id obscurè ipsi Litteris significatum. Haud tamen segniùs perrexit quò occœperat, atque etiam ubi Historiam Trochoidis typis evulgatam inspexit, seque illic Robervallio æquiparatum minimè reperit, gravem sibi factam injuriam apertè conquestus est.

Ego verò hujus expostulationis novitate perculsus, homini scribendum curavi, me quidem non modò iniquum in eo nullo modo fuisse, sed contra potiùs summæ iniquitatis reum futurum, si solutionis istius gloriam, quam præter Robervallium nemo meritus videretur, cum alio quovis communicassem. Rem sanè totam meâ nihil interesse, mihi tamen æquo cum omnibus jure agendum, & unumquemque pro suarùm inventionum merito ornandum fuisse. Ad hanc cognitionem si suâ se operâ pervenisse demonstrasset, id me prompto animo prædicaturum. Sed cùm ab eo nil quidquam simile esset effectum, ac cuivis enuntiationem ementiri, eamque solâ Archimedis bilance inventam jactare

tare promptum eſſet, non potuiſſe me ſine ſummâ injuriâ ullum Robervallio comitem adjungere.

Hæc animum ejus non ſatis placaverunt, nec etiam tùm deſtitit acriter poſtulare jus ſuum; ita ut paulò ſeveriùs admonendus fuerit officii ſui. Denuntiatum eſt igitur eam eſſe inventionis ſemel evulgatæ conditionem, ut illam ſe nemo proprio acumine comprehenſurum fuiſſe fidem vel ſibi vel aliis facere poſſit. Hac quippe cognitione menti novum lumen novaſque cogitationes inſeri; nequicquam autem peculiares quaſdam vias oſtentari, cùm liqueat tam facilè problemata jam reſoluta novis rationibus explicari quàm ægrè primùm ſolvi & expediri : adeòque totam primis ſolutionibus gloriam deberi; ſuſpicione cæteras non carere, quam ut amoliantur honeſti homines, qui res iſtas ut par eſt æſtimant, ſua ſtatim inventa ſpontè premunt, ſi fortè ab altero jam prolata reſcierint, quibuſlibet argumentis conſtet hæc ipſis penitùs ignota fuiſſe. Multò enim malunt iſtius gloriæ jacturam facere, quàm in tam moleſtæ opinionis periculum venire. Norunt ſcilicet in problemate non ſolvendo nullum dedecus, leniſſimum in ſolvendo honorem, in alienis verò fœtibus ſibi arrogandis graviſſimum eſſe flagitium.

Quemvis alium paulò ingenio erectiorem, & geometricis rebus aliquantò ſuperiorem, vel una ex iſtis cæteriſque quæ ipſi allatæ ſunt rationibus

ab

ab omnibus hujuſmodi problematis alienaſſet. At ille de ſuâ ſpe nihil remiſit, cui etiamnum inhæret pertinaciſſimè. En quâ ille ratione ſuper illis ſolutionibus Robervallianis ſe geſſerit: ubi mihi demirari ſubiit, quò vana illa laudis ex ſcientiâ petitæ cupiditas impelleret jejunos animos, gloriæ avidos, ſed minores!

Utinam verò hîc ſtetiſſet! At longè ultra provectus eſt. Quippe dum illum ab hoc conſilio deterrent omnes, aliud & id longè operioſius aggreſſus eſt. Palam ſiquidem prædicavit quæcunque propoſueram problemata diſſolviſſe ſe: quod quidem ipſum in incredibiles quaſdam multòque prioribus difficiliores conjecit anguſtias; ſiquidem antea enunciationes Robervallianæ in promptu erant, nec arduum erat ſimiles aliquas eaſque veras emittere, ac certis & arcanis comprehenſas methodis jactitare; nunc verò nihil prorsùs, præter unius duntaxat capitis enunciationem, penes illum poterat eſſe, quæ paucis inſuper à me credita ad ipſum fortè non pervenit. Cùm ergo hinc quaſcunque enunciationes & pollicitus præſtare minimè poſſet, nec eas ſuâ vel alienâ ope comparare, illinc ſæpius compelleretur ab omnibus, ut vel unam ſaltem ex iis oſtenderet, fieri aliter non potuit, quin nobis identidem provocantibus turpiter deeſſet, ac multum de ſe riſum excitaret, ut ſolent qui majora viribus temerè audent. Hoc quâ ratione contigerit jam exponam.

Menſe

Menſe Septembri occœperat ſcribere omnia hæc ſe problemata diſſolviſſe. Res ad me ſtatim delata eſt: nec mediocriter animum percuſſit minuta hominis ambitio. Noveram enim vires ipſius, & problematum meorum difficultatem: & ex cæteris quæ ad hunc diem ille protulerat, ſatis ipſum huic oneri imparem eſſe conjiciebam. Ratus ſum igitur illum aut decipi atque adeò ſi ſuum ſpontè fateretur errorem, ſummâ cum humanitate tractandum: aut id agere ut nos deciperet, ac problematum meorum evulgationem manere, ut ea deinceps ſibi arrogaret, ipſumque animi causâ reum fraudis iſtius eſſe peragendum; quod quidem mihi pronum erat ac proclive penes quem totum hujus evulgationis ſtabat arbitrium. Itaque nonnullis ſuſpiciones meas palam teſtatus, curavi ut omnes motus ejus inceſſuſque ſervarentur.

Ac primùm nondum exactâ Præmiorum die venit ab eo cujuſdam propoſitionis calculus tot & tantis undequaquè confertus erroribus, ut ab ipſo per proximum ſtatim curſorem fuerit abdicandus, non eâ ſanè quâ debuerat moderatione, ſed quâ poterat lepidiſſimâ pinguiſſimâque ferociâ. Fatebatur enim priorem quidem calculum falſum eſſe, ſibi verò tum alterum omni ex parte verum, univerſaſque ſimul propoſitiones complexum, tum demonſtrationes omnes ſerie deſcriptas, & ad edendum paratas eſſe in manibus, quas tamen in publicum

blicum exire non eſſet paſſurus, niſi meis antea vulgatis, quod per illud temporis, ineunte ſcilicet Octobre, præſtiturum me profeſſus eram.

Quid hæc ſibi vellent ſatis intellexi, nec cuiquam ampliùs dubitatum eſt quin ipſiſſimum illud eſſet quod futurum eſſe denuntiaram. Placuit igitur ad extremas hunc anguſtias deducere. Et quò maniſeſtiùs liqueret nihil ipſum niſi me præeunte promere poſſe, tres in menſes ad Kalendas nempè Januarias vulgationem problematum meorum in Hiſtoriâ Trochoidis rejeci, eas alioquin Kalendis Octobris, quod & ipſe ſibi pollicebatur, daturus in lucem.

Hac quidem prolatione nihil ipſi fuerat commodius, ſi modò ſolutiones iſtæ præſto fuiſſent. Illæ verò procul aberant; ideòque & hanc velut infenſam & myſteriorum ſuorum enunciatricem tulit ægerrimè. Noverat enim ita de ſe ſententiam laturos omnes, ut hac morâ uteretur. Illud, inquam, homini ſtomachum fecit, quem ille tam candidè ac non diſſimulanter aperuit, ut ſcribere non veritus ſit, novum planè ſibi videri me meorum problematum editionem tres totos in menſes ſine causâ diſtuliſſe. Reſponſum eſt ſummâ illum injuriâ mihi ſuccenſere; nil ipſi commodius & opportunius; quin potiùs occaſionem oblatam arriperet ac primæ inventionis honorem ſibi aſſereret, dum ego quaſi conſtrictis mihimet manibus otioſus ſederem;

poſſe

poſſe illum ſi modò quod antea prædicaverat in promptu eſſet opus ſuum, illud geminis vel etiam tribus ante alterum quemlibet menſibus producere, atque ita unum fore, quem conſtaret inventa ſua à nemine mutuatum; denique quæcunque alio loco ad ipſum deterrendum dicta erant, nunc ad ipſum excitandum ſtimulandumque repetita ſunt.

His rationibus nihil validius quicquam. Nihilominus homini conſcio infirmitatis ſuæ altera quædam ſuberat ineluctabilis quâ ad diſſentiendum cogebatur. Iterùm ergo reſcripſit fixum eſſe ſibi nihil omninò niſi poſt editas propoſitiones meas edere. Hæc reſponſio ſic accepta eſt ut dignum erat: viſum eſt nullâ circuitione jam utendum.

Planè ergo & apertè ſignificatum eſt ejus rationem iniquiſſimam eſſe, nec commodas de ipſo ſuſpiciones omnium animis inſediſſe; miſſum ante fallacem ab illo calculum, veri, ſi modò ipſi præſtò eſſet, mittendi neceſſitatem afferre, ſiquidem honori ſuo conſultum vellet; at rem ſemper in diem trahere, & tam multis compellationibus exſtimulatum ſilere; denique nullas mittere ſolutiones niſi alienis priùs inſpectis, id verò vel tardioribus ingeniis fidem facere nullas reverâ ſolutiones ipſi ſuppetere. Poſtremò itaque denuntiatum eſt, ut intra finem vertentis anni vel methodos ſuas, vel calculos mitteret, ſi non expreſſis verbis conceptos, ſaltem aliquibus notis involutos; nullum jam tergiverſandi

giverſandi locum relictum eſſe; eam enim demùm & ſecuriſſimam & frequentiſſimam eſſe viam, quâ quis ſibi poſſet alicujus inventionis gloriam vindicare, nec aliis rapiendam exponere. Quæ ſi conditiones ipſi arriderent, reliquum eſſe, ut alicui ſuorum menſe Decembris notas ſuas mitteret; meas dudùm paratas; utraſque ſimul productum iri, ut cujus notæ expoſitæ veritati congruere deprehenderentur, hic genuinus iſtorum problematum interpres haberetur: contra cujus expoſitæ notæ errore cenſerentur implicitæ, is inventionis palmâ excideret, nec ad eam alienis deinceps ſolutionibus cognitis aſpirare poſſet.

His conditionibus nihil æquius præciſiuſque viſum, quas ſi refugeret ille ſedulò commonitus eſt, & ſeveritate quantam humanitatis leges ferre poterant maximâ, certo iſtud indicio futurum omnibus eas illum ſolutiones nunquam habuiſſe, nunquam alioquin primæ inventionis laudem cuiquam conceſſurum fuiſſe. Quòd ſi repudiatis quæ ipſi oblatæ fuerant conditionibus, meiſque exinde ſolutionibus vulgatis, aliquas etiam vulgandi conſilium reſumeret, manifeſtum apud omnes plagiarium habitum iri, debitamque his factis opinionem ſibi accerſiturum. Suſpenſis omnium animis expectabatur ejus reſponſio, tanquam ultimum ingenii ejus ſpecimen datura. Nec multo poſt tempore advenit illa quidem auguriorum meorum

confirmatrix certiſſima. Enim verò reſcribebat ille, nequicquam à ſe vel ſcripta vel notas vel aliud quidpiam exigi; conditiones nullas ſe recipere; nec quidlibet editurum, priuſquam mea inventa edita inſpexiſſet : de Præmiis laudibuſve nihil mecum certare : id unum ſibi eſſe in animo, ut problemata mea videret, nonnullaque ſimilia promeret : fixum illud ſibi ac immotum; nec quidquam amplius de his omnibus auditurum libenter.

Plana hæc erant & aperta, nec quidlibet efflagitari potuit, quo plenius convinceretur, niſi reum ſe ingenuè confiteretur, quod ab ipſo ſperari non poterat. Hac igitur omnium conditionum declinatione ſatis ſuperque convictus judicatus eſt : ego verò nequicquam meorum problematum editionem prorogaturus, quandoquidem ille nullos niſi me præeunte greſſus facturum ſe profeſſus, me quoque cunctante cunctaturus foret, ac res ſic in immenſum proceſſura. Ratus ſum itaque rem ultra præſtitutum Kalendarum Januarii tempus protrahendam non eſſe, ſed ubi quid primùm otii nactus eſſem, totum id poſt tantas prolationes abſolvendum, ac ſic votis tot eruditorum hominum quibus hæ quæſtiones non injucundæ fuerunt faciendum ſatis.

Interim haud abs re viſum eſt mihi, ut hæc narratio velut præcurreret, ſi fortè ſolutiones meas ille in ſe transferre moliretur, omnium oculis expo-

ſitura

ſitura veritatem. Id unum hoc ſcripto perfectum volui, non autem virum ullatenùs infamatum, quem equidem omnibus officiis lubentiſſimè colerem, cujus & dignitati honorem habeo quamplurimum. Ideòque nomini ejus peperci; quod ille ſi modò hæc inventa ſibi arrogando revelaverit, ſibi tribuat quicquid dedecoris indè contraxerit. Nec dubitet ille futurum ut ejus artes omnium oculis ſubjiciantur.

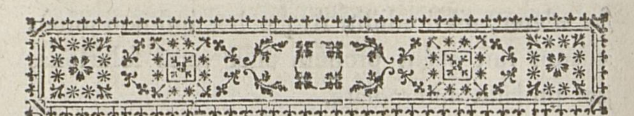
Neque verò effugium ſibi ſperet emendicato alicujus amici chirographo, teſtificantis forſan viſum ſibi ante Kalendas Januarii librum ejus manu exaratum. Haud ita omninò iſta tractantur: ſola editio fidem facit. Non negaverim quin ſi de calculo quodam tribus verſibus comprehenſo diſceptaretur, plura ac inter ſe congruentia ejus exemplaria multis ante tradita, nonnihil fidei factura eſſent. At cùm de integro volumine, de centum Geometriæ propoſitionibus earumque calculis agitur, ubi nihil æquè facile eſt ac numeros pro numeris, notas pro notis ſubſtituere, ludicrum ſanè ac lepidum amici afferre chirographum, aſſerentis hunc librum hac vel iſtâ die ſibi inſpectum, præſertim ſi oſtendi poſſet ab ipſo nec lectum illum nec excuſſum. Nemo ſibi tantùm jure tribuerit, ut ad dubitationes omnes tollendas ſola ſua autoritas ſufficiat. In Geometricis ſola demùm manifeſta creduntur. Sex ſeptemve menſes conceſſi ut

ſua

ſua ederet, nihil edidit. Atque hoc ipſi non minùs arduum fuit quàm pronum eſſet veras ſolutiones jam prolatas interpolare.

Sed hæc cave ne nova illi ac inuſitata exiſtimes, nec quos etiam in Robervalliana problemata fecit incurſus. Ita enim ubique homo eſt : adeò ut jam plures annos ambitiosè effutiat Quadraturam circuli à ſe inventam, eamque ubi tempus tulerit à ſe proditum iri, ſimul cum hyperboles Quadraturâ : i nunc, & homini, quantum de ſe prædicat, credulus largito.





DIVERSES INVENTIONS *DE A. DETTONVILLE* (1), EN GÉOMÉTRIE.

LETTRE DE M. DE CARCAVI *A M. DETTONVILLE.*

MONSIEUR,

PERSONNE n'ayant donné les ſolutions des Problêmes que vous avez propoſés depuis ſi long-temps, vous ne pouvez plus refuſer de paroître pour les donner vous-même, comme la promeſſe que vous en avez faite vous y engage. Je ſais que ce vous ſera de la peine d'écrire tant de ſolutions & de méthodes; mais auſſi c'eſt toute celle que vous y aurez : car pour l'impreſſion je ne ſonge pas à vous la propoſer, j'ai des perſonnes qui en auront ſoin. Et il s'offre encore un ſoulagement à votre travail, en ce qu'il ne ſera pas néceſſaire de vous étendre ſur les Problêmes

(1) C'eſt le nom ſous lequel Paſcal ſe cacha, comme il a été dit dans l'Hiſtoire de ſa vie.

que

que vous avez proposés comme faciles, tels que sont *le centre de gravité de la ligne courbe* de la Roulette & de ses parties, & *la dimension des surfaces* des solides; de sorte que vous n'aurez presque qu'à donner ceux que vous avez proposés comme difficiles, c'est-à-dire, *le centre de gravité des solides, & des demi-solides* de la Roulette & de ses parties, tant autour de la base, qu'autour de l'axe, auxquels vous aviez attaché les Prix dans votre premier Écrit; & *le centre de gravité des surfaces de ces solides & demi-solides*, desquels vous avez dit, en les proposant dans l'Histoire de la Roulette, *que c'étoient ceux que vous estimiez difficiles, & proprement les seuls que vous proposiez*.

Ce sont donc aussi proprement les seuls que nous vous prions de donner, & dont nous avons considéré le succès avec attention. Car comme ils paroissent si difficiles par la seule énonciation, & que vous qui les connoissiez à fonds, vous m'aviez dit plusieurs fois que vous en jugiez la difficulté si grande, je crus qu'elle étoit extrême; & quand je les eus un peu considérés en effet, il me sembla, selon le peu de lumiere que j'en ai, que le moins qu'on pouvoit en dire, étoit qu'il n'avoit rien été résolu de plus caché dans toute la Géométrie, soit par les anciens, soit par les modernes; & je ne fus pas seul dans ce sentiment.

Ainsi lorsque le terme du premier Octobre fut arrivé, nous fumes bien aises de voir que vous le prolongeates jusqu'au premier Janvier; parce que nous espérames de mieux reconnoître, par un plus long espace de temps, si le jugement que nous en faisions étoit véritable; & le succès confirme bien notre pensée. Car une attente de sept ou huit mois sans solution, en est une marque considérable, en un temps où se trouvent d'aussi grands Géometres, & en plus grand nombre à la fois qu'on n'en ait jamais vu, & où l'on a résolu les

Problêmes les plus difficiles. Car encore que pour la grandeur du génie aucun des anciens n'ait peut-être surpassé Archimede ; il est certain néanmoins que pour la difficulté des Problêmes, ceux d'aujourd'hui surpassent de beaucoup les siens, comme il se voit par la comparaison des figures toutes uniformes qu'il a considérées, à celles que l'on considere maintenant, & sur-tout à la Roulette & à ses solides, à l'escalier, aux Triangles cylindriques, & aux autres surfaces & solides dont vous avez découvert les propriétés.

Il n'y a donc jamais eu de temps si propre que celui-ci, à éprouver la difficulté des propositions de Géométrie. Or nous n'avons vu la solution d'aucune de celles que vous avez proposées comme difficiles. On a bien envoyé celle des Problêmes que vous aviez déclaré être plus faciles; savoir, *le centre de gravité de la ligne courbe & la dimension des surfaces des solides*, laquelle M. Wren nous envoya dans ses Lettres du 12 Octobre ; & M. de Fermat aussi dans les siennes, où il donne une méthode fort belle & générale pour la dimension des surfaces rondes ; mais pour ces *centres de gravité des solides & demi-solides & de leurs surfaces*, nous n'en avons point vu de résolution.

Je dirai à tout autre qu'à vous, Monsieur, ce que cela a fait juger de la difficulté de vos Problêmes, & de ce qu'il falloit être pour les résoudre ; & je ne vous parlerai ici que du desir que nous en avons, & de la nécessité où nous sommes d'avoir recours à vous pour des choses que nous ne pouvons avoir que de vous. N'espérez donc pas fuir nos importunités. Je suis résolu de ne jamais cesser de vous en faire, non plus que de rechercher les occasions de vous témoigner combien je suis, &c.

De Paris, ce 10 Décembre 1658.

LETTRE



LETTRE
DE M. DETTONVILLE
A M. DE CARCAVI,
Ci-devant Conſeiller du Roi en ſon Grand-Conſeil.

MONSIEUR,

PUISQUE je ſuis enfin obligé de donner moi-même la réſolution des Problêmes que j'avois propoſés, & que la promeſſe que j'en ai faite m'engage néceſſairement à paroître, je veux, en découvrant mon nom, faire connoître en même-temps à tout le monde combien celui qui le porte a de reſpect & d'eſtime pour votre perſonne, & de reconnoiſſance pour toute la peine que vous avez voulu prendre en cette occaſion. Je ſouhaiterois qu'elle pût être, en quelque façon, récompenſée par ce diſcours que je vous donne, où vous verrez non-ſeulement la réſolution de ces Problêmes, mais encore les méthodes dont je me ſuis ſervi, & la maniere par où j'y ſuis arrivé. C'eſt ce que vous m'avez témoigné ſouhaiter principalement, & ſur quoi je vous ai ſouvent oui plaindre de ce que les Anciens n'en ont pas uſé de même : ne nous ayant

laissé que leurs seules solutions sans nous instruire des voies par lesquelles ils y étoient arrivés, comme s'ils nous eussent envié cette connoissance.

Je ne me contenterai donc pas de vous donner les calculs ; desquels voici celui du cas que j'avois proposé : *le centre de gravité du demi-solide de la demi-Roulette, tournée à l'entour de la base, est distant de la base d'une droite qui est au diametre du cercle générateur, comme sept fois le diametre à six fois la circonférence, & est distant de l'axe d'une droite égale au quart de la circonférence du cercle générateur, moins seize quinziemes parties de la distance qui est entre le centre du cercle générateur, & le centre de gravité de son demi-cercle.* Mais je vous découvrirai de plus ma méthode générale pour les centres de gravité, qui vous plaira d'autant plus, qu'elle est plus universelle : car elle sert également à trouver les centres de gravité des plans, des solides, des surfaces courbes & des lignes courbes. J'ai besoin, pour vous l'expliquer, de cette définition.

S'il y a tant de quantités qu'on voudra *A, B, C, D*, lesquelles on prenne en cette sorte : premiérement, la somme de toutes *A, B, C, D* ; puis la somme des mêmes, excepté la premiere, savoir, *B, C, D*; puis la somme des mêmes, excepté les deux premieres, savoir, *C, D* ; & ainsi toujours, comme on les voit ici marquées :

J'appelle

J'appelle la ſomme de ces quantités, priſes de cette ſorte, *la ſomme triangulaire de ces mêmes quantités, à commencer par* A; car on

A B C D
B C D
C D
D

pourroit prendre la ſomme de ces mêmes quantités, à commencer par *D*, & qui ne ſeroit pas la même.

Cela poſé, je vous dirai les penſées qui m'ont mené à cette connoiſſance. J'ai conſidéré une balance *B*, *A*, *C*, ſuſpendue au point *A*, & . . .

B — — — *A* — — *C*
4 5 3 . 9 8

ſes bras de telle longueur qu'on voudra *A B*, *A C*, diviſés en parties égales de part & d'autre, avec des poids pendus à chaque point de diviſion; ſavoir, au bras *A B*, les poids 3, 5, 4, & au bras *A C* les poids 9, 8; & ſuppoſant la balance être en équilibre en cet état, j'ai tâché de comprendre quel rapport il y avoit entre les poids d'un bras & ceux de l'autre, pour faire cet équilibre: car il eſt viſible que ce n'eſt pas que la ſomme des uns ſoit égale à celle des autres; mais voici le rapport néceſſaire pour cet effet.

Pour faire que les poids d'un bras ſoient en équilibre avec ceux de l'autre, *il faut que la ſomme triangulaire des uns ſoit égale à la ſomme triangulaire des autres*, à commencer toujours du côté du point *A*. Et la démonſtration en ſera facile par

le moyen de ce petit Lemme, dont vous verrez un aſſez grand uſage dans la ſuite.

Si les quatre quantités *A*, *B*, *C*, *D*, ſont priſes en cette ſorte : la premiere une fois, la ſeconde deux fois, la troiſieme trois fois, &c.; je dis que la ſomme de ces quantités priſes de cette ſorte, eſt égale à leur ſomme triangulaire, en commençant du côté *A*.

D	*C*	*B*	*A*		*A*	*B*	*C*	*D*
4	3	2	1			*B*	*C*	*D*
							C	*D*
								D

Car en prenant leur ſomme triangulaire, on ne fait autre choſe que les combiner en telle ſorte, qu'on prenne *A* une fois, *B* deux fois, *C* trois fois, &c.

Venons maintenant à ce que je propoſe de la balance. On ſait aſſez en Géométrie, que les forces des poids ſont en raiſon compoſée des poids & des bras, & qu'ainſi le poids 4 en la troiſieme diſtance, a une force triple; que le poids 5 en la ſeconde diſtance, a une force double, &c. Donc la force des poids des bras doit ſe conſidérer en prenant celui qui eſt à la premiere diſtance une fois, celui qui eſt à la ſeconde deux fois, &c. Ainſi pour faire qu'ils ſoient en équilibre de part & d'autre, il faut que la ſomme des poids d'un bras étant pris de cette ſorte : ſavoir, le premier

une fois, le ſecond deux fois, &c., ſoit égale à la ſomme des poids de l'autre pris de la même ſorte; c'eſt-à-dire (par le Lemme précédent), que la ſomme triangulaire des uns ſoit égale à la ſomme triangulaire des autres. Ce qu'il falloit démontrer.

Vous voyez, Monſieur, que je ſuis entré dans le ſtyle géométrique; & pour le continuer, je ne vous parlerai plus que par Propoſitions, Corollaires, Avertiſſements, &c. Permettez-moi donc de m'expliquer en cette ſorte ſur ce que je viens de vous dire, afin qu'il ne reſte aucune ambiguité.

AVERTISSEMENT.

J'entends toujours que les deux extrémités de la balance paſſent pour des points de diviſion; & ainſi quand je dis que des poids ſoient pendus à tous les points de diviſion, j'entends qu'il y en ait auſſi aux deux extrémités de la balance.

J'entends auſſi que le bras *A B* puiſſe être égal ou inégal à l'autre bras *A C*, & que chacune des parties égales du bras *A B* ſoit égale à chacune des parties égales du bras *A C*, & que les parties d'un bras ne different au plus des parties de l'autre bras que par leur multitude. Or de cette égalité de chacune des parties, il s'enſuit que le poids 3 étant pris, par exemple, de trois livres, & peſant ſimplement comme trois livres ſur la premiere diſtance; le poids 5 étant de cinq livres ſur

la

la ſeconde diſtance, aura la force de dix livres, c'eſt-à-dire, double de celle qu'il auroit ſur la premiere diſtance; & le poids 4 ſur la troiſieme diſtance, aura la force de douze livres, c'eſt-à-dire, triple de celle qu'il auroit ſur la premiere diſtance. De même ſur l'autre bras le poids 9 ſur la premiere diſtance, aura ſimplement la force de neuf livres, & le poids 8 la force de ſeize livres; & ainſi à l'infini, les poids ſeront multipliés autant de fois qu'il y aura de parties égales dans leurs bras, à compter du centre de gravité commun *A*, auquel la balance eſt ſuſpendue.

Il faut auſſi remarquer que cette propriété de la balance que j'ai donnée, ſavoir, l'égalité des ſommes triangulaires des poids de chaque bras eſt générale, encore qu'il y ait des points de diviſion ſans poids, au lieu deſquels en mettant un zéro, il ne laiſſera pas d'être employé en prenant les ſommes triangulaires, comme on voit en cet exemple:

Soit une balance *B A C* ſuſpendue au point *A*, & diviſée en parties égales, comme il a été dit; & ſoit ſur la premiere diſtance du bras *A C* le poids 9, & ſur la ſeconde le poids 8: & ſur la premiere diſtance du bras *A B*, le poids 4; ſur la ſeconde diſtance, nul poids ou zéro; ſur la troiſieme le poids 7:

B *A* *C*

7 0 4 . 9 8

Je

Je dis que ſi la ſomme triangulaire des poids 4, 0, 7, eſt égale à la ſomme triangulaire des poids 9, 8 (à commencer toujours du côté *A*), la balance ſera en équilibre ſur le centre *A*.

La démonſtration en eſt la même que la précédente.

7 0 4	9 8
7 0	8
7	
25	25

De cette propriété je démontre les trois propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit C A B *une balance diviſée en tant de parties égales qu'on voudra aux points* C, D, A, E, F, B, *auxquelles ſoient pendus les poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7;

B	F	E	A	D	C
7	0	4	5	9	8

de tous leſquels enſemble le centre de gravité commun ſoit au point A (*l'un de ces points*) : *Je dis que la ſomme triangulaire de tous ces poids, à commencer du côté qu'on voudra, par exemple, du côté* C; *c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7, *eſt égale à la ſimple ſomme de ces poids* 8, 9, 5, 4, 0, 7, (*c'eſt-à-dire, à la ſomme de ces poids pris chacune une fois*) *multipliée autant de fois qu'il y a de points dans le bras*

CA,

CA, (*puiſqu'on a commencé par le côté* C), *c'eſt-à-dire, trois fois en cette figure* . . . . . .

7	0	4	5	9	8	7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9		7	0	4	5	9	8
7	0	4	5			7	0	4	5	9	8
7	0	4									
7	0										
7											
		99						99			

Car la ſomme triangulaire des poids 4, 0, 7, pendus au bras *AB*, (qui eſt diſtinguée du reſte par une barre dans la premiere partie de la figure) eſt égale à la petite ſomme triangulaire des poids 9, 8, pendus à l'autre bras *AC*, (qui eſt auſſi diſtinguée du reſte dans l'autre partie de la figure). Et les reſtes ſont les mêmes de part & d'autre.

AVERTISSEMENT.

Je ſais bien que cette maniere de démontrer n'eſt pas commune; mais comme elle eſt courte, nette & ſuffiſante à ceux qui ont l'art de la démonſtration, je la préfere à d'autres plus longues que j'ai en main.

PROPOSITION II.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſimple ſomme des poids, multipliée autant de fois qu'il y a de points en toute la balance, eſt à la

ſomme

ſomme triangulaire de tous les poids, à commencer par le côté qu'on voudra, par exemple, par le côté C, *comme le nombre des points qui ſont dans la balance entiere, au nombre des points qui ſont dans le bras par où on a commencé à compter; c'eſt-à-dire, en cet exemple, dans le bras* CA . . . . .

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	
7	0	4	5		
7	0	4			
7	0				
7					
		99			

7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9	8
		198			

Je dis que la ſomme triangulaire 99 *eſt à la ſomme,* 198, *des poids multipliée par leur multitude, comme la multitude des points du bras* CA, *ſavoir,* 3, *à la multitude de tous les points, ſavoir,* 6.

Car dans la Figure la ſomme triangulaire de tous les poids eſt égale, par la précédente, à la ſimple ſomme des poids multipliée par la multitude des points qui ſont dans le bras *AC*, & qui ſont ici au-deſſus de la barre. Or la ſomme des poids multipliée par cette multitude des points du bras *AC*, eſt viſiblement à la même ſomme des poids multipliée par la multitude des points de la balance entiere, comme une de ces multitudes eſt à l'autre.

PROPOSITION

PROPOSITION III.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſomme triangulaire des poids, à commencer par un des côtés, comme par le côté C, *eſt à la ſomme triangulaire des mêmes poids, à commencer par l'autre côté* B, *comme le nombre des points qui ſont dans le bras* AC, *par où l'on a commencé la premiere fois, au nombre des points qui ſont dans le bras* BA, *par où l'on a commencé la ſeconde fois . .*

7	0	4	5	9	8		7	0	4	5	9	8
7	0	4	5	9				0	4	5	9	8
7	0	4	5						4	5	9	8
7	0	4								5	9	8
7	0										9	8
7												8
			99						132			

Je dis que la ſomme triangulaire 99, *en commençant par* 8, *eſt à l'autre ſomme triangulaire* 132, *en commençant par* 7, *comme la multitude des points du bras* 8, *ſavoir*, 3, *à la multitude des points de l'autre bras* 7, *ſavoir*, 4.

Car chacune de ces ſommes triangulaires eſt, par la précédente, à la ſimple ſomme de tous les poids multipliés par leur multitude, comme la multitude des points de chaque bras, à la multitude de tous les points de la balance entiere. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

Comme toutes les choſes que je viens de démontrer ſur le ſujet des poids d'une balance, doivent s'appliquer à toutes ſortes de grandeurs, c'eſt-à-dire, aux lignes courbes, aux ſurfaces planes & courbes, & aux ſolides, il me ſemble à propos, pour faciliter cette application, de donner quelques exemples de la maniere dont on doit prendre les ſommes triangulaires dans ces grandeurs.

Soit donc (*Fig.* 3.) une ligne courbe quelconque *CB* diviſée comme on voudra en parties égales ou inégales aux points *I*, *G*, *F*: pour prendre la ſomme triangulaire des portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB*, à commencer du côté de *C*, il faudra prendre la toute *CFB*, plus la portion *IFB*, plus la portion *GFB*, plus la portion *FB*. Fig. 3.

Car par la définition, la ſomme triangulaire de toutes les portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB* ſe trouve en les prenant en cette ſorte : premiérement, toutes enſemble, & enſuite toutes enſemble excepté la premiere, & puis toutes enſemble excepté les deux premieres, &c., en cette ſorte . . . .

$CI + IG + GF + FB$ ou la ligne CFB.
Plus . . $IG + GF + FB$ ou la ligne IFB.
Plus . . . . $GF + FB$ ou la ligne GFB.
Plus . . . . FB ou la ligne FB.

Pareillement la ſomme triangulaire de ces mêmes

mes portions *BF*, *FG*, *GI*, *IC*, à commencer par *B*, ſe trouvera en prenant la ligne entiere *BIC*, plus la portion *FIC*, plus la portion *GIC*, plus la portion *IC*; ce qui paroît de même en cette ſorte:

BF + *FG* + *GI* + *IC* ou la ligne *BIC*.
Plus . . *FG* + *GI* + *IC* ou la ligne *FIC*.
Plus . . . . *GI* + *IC* ou la ligne *GIC*.
Plus . . . . *IC* ou la ligne *IC*.

De la même ſorte, ſi le triligne *CAB* eſt diviſé en tant de parties qu'on voudra, par les droites *IK*, *GH*, *FE*, la ſomme triangulaire de ſes portions *CIKA*, *IGHK*, *GFEH*, *FBE*, à commencer du côté de *CA*, ſe trouvera en prenant le triligne *CBA*, plus le triligne *IBK*, plus le triligne *GBH*, plus le triligne *FBE*.

Ce qui paroît par la ſomme de ces portions priſes en la maniere accoutumée, comme on voit ici:

CIKA + *IGHK* + *GFEH* + *FBE* ou le triligne *BCA*.
Plus . . *IGHK* + *GFEH* + *FBE* ou l'eſpace *IBK*.
Plus . . . . . . *GFEH* + *FBE* ou l'eſpace *GBH*.
Plus . . . . *FBE* ou l'eſpace *FBE*.

On prendra de même ſorte la ſomme triangulaire des portions des ſurfaces courbes & celle des ſolides, ſans qu'il ſoit beſoin d'en donner davantage d'exemples.



MÉTHODE

MÉTHODE générale pour les centres de gravité de toutes ſortes de lignes, de ſurfaces & de ſolides.

ÉTANT propoſée une ligne courbe, ou un plan, ou une ſurface courbe, ou un ſolide, en trouver le centre de gravité?

Soit entendue une multitude indéfinie de plans paralleles entre eux & également diſtants (c'eſt-à-dire, que la diſtance du premier au ſecond ſoit égale à la diſtance du ſecond au troiſieme, & à celle du troiſieme au quatrieme, &c.) : leſquels plans coupent toute la grandeur propoſée en une multitude indéfinie de parties compriſes chacune entre deux quelconques de ces plans voiſins.

Maintenant ſi de tous ces plans on en conſidere principalement trois, ſavoir, les deux extrêmes, qui comprennent la grandeur propoſée, & celui qui paſſe par le centre de gravité de la grandeur propoſée, & qu'on entende qu'une droite quelconque menée perpendiculairement d'un des plans extrêmes à l'autre, rencontre le plan du centre de gravité, lequel la diviſe en deux portions : cette droite entiere qui meſure la diſtance d'entre les plans extrêmes, ſera appellée *la balance de la grandeur propoſée*, & ſes deux portions qui meſurent

la distance entre le centre de gravité de la grandeur proposée & les plans extrêmes, s'appelleront *les bras de la balance :* & la raison d'un de ces bras à l'autre se trouvera en cette sorte :

Je dis qu'un des bras est à l'autre (c'est-à-dire, que la distance entre le centre de gravité de la figure & l'un des plans extrêmes, est à la distance entre le même centre de gravité & l'autre plan extrême), comme la somme triangulaire de toutes les portions de la figure, à commencer par le premier plan extrême, à la somme triangulaire de ces mêmes portions, à commencer par l'autre plan extrême.

AVERTISSEMENT.

Afin qu'il ne reste ici aucune ambiguité, je m'expliquerai plus au long.

Soit donc proposée, premiérement, une ligne
Fig. 3. courbe *C B* (*Fig.* 3.) laquelle soit coupée en un nombre indéfini de parties aux points *C, I, G, F, B,* par une multitude indéfinie de plans paralleles & également distants, ou, si l'on veut, par une multitude indéfinie de droites paralleles & également distantes *C A, I K, G H, F E, B O* (car les droites suffisent ici, & les plans n'ont été mis dans l'énonciation générale, que parce que les droites ne suffiroient pas en tous les cas). Soit maintenant menée *A B* où l'on voudra perpendiculaire à toutes les paralleles, laquelle coupe les extrêmes aux points

B, A,

B, *A*, & celle qui paſſe par le centre de gravité de la ligne propoſée, au point *T* : cette droite *B A* ſera appellée *la balance*, & les portions *T A*, *T B* ſeront appellées *les bras de la balance*.

Je dis que le bras *T B* ſera au bras *T A*, comme la ſomme triangulaire des portions de la ligne, ſavoir, des portions *B F*, *F G*, *G I*, *I C*, à commencer du côté de *B*, à la ſomme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de *A*.

Soit maintenant la grandeur propoſée un plan, comme le triligne *C B A*, coupé par les mêmes paralleles *C A*, *I K*, *G H*, *F E*, *B O*, & que la même perpendiculaire *B A* le coupe comme il a été dit, & rencontre celle qui paſſe par le centre de gravité du plan propoſé *C B A* au point *T* : je dis que le bras *T B* ſera au bras *T A*, comme la ſomme triangulaire des portions du triligne, *B F E*, *E F G H*, *G I K H*, *C I K A*, à commencer du côté de *B O*, à la ſomme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de *A C*.

Soit maintenant la grandeur propoſée une ſurface courbe *C Y Z B F C*, coupée par les mêmes plans paralleles *A C Y*, *K I M*, *H G N*, *E F Z*, *O B X*, qui coupent la ſurface donnée & y produiſent, par leurs communes ſections, les lignes *C Y*, *I M*, *G N*, *F Z*, &c.; & que la balance *B A* meſure toujours la diſtance entre les plans extrêmes, & coupe celui qui paſſe par le centre de gravité

vité de cette ſurface courbe au point *T* : je dis que le bras *TB* ſera au bras *TA*, comme la ſomme triangulaire des portions de la ſurface, ſavoir, *ZFB*, *FZNG*, *NGIM*, *MICY*, à commencer du côté de *B*, c'eſt-à-dire, la ſomme des ſurfaces *BCY*, *ZFCY*, *NGCY*, *MICY*, à la ſomme triangulaire des mêmes portions, à commencer du côté de *AC*, c'eſt-à-dire, des ſurfaces *CYB*, *IMB*, *GNB*, *FZB*.

Enfin ſi la grandeur propoſée eſt un ſolide *YCFBAC*, coupé par les mêmes plans paralleles, & que la balance *BA* meſure de même la diſtance entre les plans extrêmes, & coupe celui qui paſſe par le centre de gravité du ſolide au point *T* : le bras *TB* ſera toujours au bras *TA*, comme la ſomme triangulaire des portions du ſolide, à commencer par *B*, à la ſomme triangulaire des mêmes portions, à commencer par *C*.

DÉMONSTRATION DE CETTE MÉTHODE.

La démonſtration en eſt facile, puiſque ce n'eſt que la même choſe que ce que j'ai donné de la balance.

Car ſoit conſidérée la droite *BA* comme une balance diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points *A*, *K*, *H*, *E*, *B*, auxquels pendent pour poids les portions de la grandeur propoſée, & à l'un deſquels ſe rencontre le point *T*, qui

qui ſera le centre de gravité de la balance, comme cela eſt viſible par la doctrine des Indiviſibles, laquelle ne peut être rejettée par ceux qui prétendent avoir rang entre les Géometres.

Donc, par la troiſieme propoſition de la balance, la ſomme triangulaire des poids (ou des portions de la figure) à commencer du côté *B*, eſt à la ſomme triangulaire des mêmes poids, à commencer du côté *AC*, comme le nombre des points (ou des parties) du bras *BT*, au nombre des points (ou des parties) du bras *AT*, c'eſt-à-dire, comme *BT* à *TA*. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Je ſais bien que ces portions de la grandeur propoſée ne pendent pas préciſément aux points de diviſion de la balance *BA*; mais je n'ai pas laiſſé de le dire, parce que c'eſt la même choſe. Car en diviſant chacune de ces parties égales de la balance *BA* par la moitié, ces nouvelles diviſions donneront une nouvelle balance qui ne différera de la premiere que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée (puiſque la multitude des parties eſt indéfinie), & le centre de gravité de la balance ſe trouvera encore à une de ces nouvelles diviſions, ou n'en ſera éloigné que d'une diſtance moindre qu'aucune donnée, ce qui ne changera point les raiſons : & les portions de la grandeur propoſée

 pendront

pendront précisément aux points de ces nouvelles divisions, en considérant au lieu des portions de la grandeur proposée, qui seront peut-être irrégulieres, les portions régulieres qu'on leur substitue en Géométrie, & qui ne changent point les raisons; c'est-à-dire, en substituant aux portions de la ligne courbe leurs cordes, aux portions du triligne les rectangles compris de chaque ordonnée & d'une des petites portions égales de l'axe; & de même aux solides : ce qui ne change rien, puisque la somme des portions substituées ne differe de la somme des véritables, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Donc on conclura nécessairement dans cette nouvelle balance la proportion dont il s'agit, & par conséquent elle se conclura aussi dans l'autre.

J'ai voulu faire cet avertissement, pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables regles des Indivisibles, se démontrera aussi à la rigueur & à la maniere des Anciens; & qu'ainsi l'une de ces méthodes ne differe de l'autre qu'en la maniere de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables, quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par-là. Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des Indivisibles, *la somme des lignes*, ou *la somme des plans*; & ainsi quand je considérerai, par exemple (*Fig.* 4.), le diametre d'un demi-cercle

Fig. 4.

demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points *Z*, d'où soient menées les ordonnées *Z M*, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, *la somme des ordonnées*, qui semble ne pas être géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des Indivisibles, & qui s'imaginent que c'est pécher contre la Géométrie, que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par-là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles faits de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diametre, dont la somme est certainement un plan, qui ne differe de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

Ce n'est pas que ces mêmes lignes *Z M* ne puissent être multipliées par d'autres portions égales d'une autre ligne quelconque qui soit, par exemple, double de ce diametre, comme en la *Figure* 5; & Fig. 5.
alors la somme de ces lignes *Z M* formera un espace double du demi-cercle, savoir, une demi-ellipse: & ainsi la somme des mêmes lignes *Z M* formera un espace qui sera plus ou moins grand, selon la grandeur de la ligne droite, par les portions égales de laquelle on entend qu'elles soient multipliées, c'est-à-dire, selon la distance qu'elles garderont entre elles. De sorte que quand on parle de *la somme*

d'une multitude indéfinie de lignes, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales & indéfinies de laquelle elles ſoient multipliées. Mais quand on n'exprime point cette droite (par les portions égales de laquelle on entend qu'elles ſoient multipliées) il faut ſouſentendre que c'eſt celle des diviſions de laquelle elles ſont nées, comme en l'exemple de la *Fig.* 4, où les ordonnées *Z M* du demi-cercle étant nées des diviſions égales du diametre, lorſqu'on dit ſimplement *la ſomme des lignes Z M*, ſans exprimer quelle eſt la droite par les portions de laquelle on veut les multiplier, on doit entendre que c'eſt le diametre même, parce que c'eſt le naturel : & ſi on vouloit les multiplier par les portions d'une autre ligne, il faudroit alors l'exprimer.

Il faut entendre la même choſe quand toutes les lignes ſeroient courbes, tant celles dont on conſidere la ſomme, que celle par les portions de laquelle on les multiplie : ou quand les unes ſont droites & les autres courbes, comme, par exemple, en la *Fig.* 4, ſi l'on dit ſimplement ainſi, *la ſomme de tous les arcs C M*, compris entre le point *C* & chacune des ordonnées, on doit entendre la ſomme des rectangles compris de chacun de ces arcs *CM* étendus en ligne droite, & de chacune des petites portions égales du diametre *Z Z*, *Z Z*, *&c.*

Fig. 6. Ainſi en la *Fig.* 6, où l'arc de 90 dégrés *B C* eſt

eſt diviſé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points *D*, d'où ſont menés les ſinus droits *DE*, ſi on dit ſimplement ainſi, *la ſomme des ſinus DE*, on entendra par-là la ſomme des rectangles compris de chaque ſinus *DE* & de chacun des petits arcs égaux *DD* conſidérés comme étendus en ligne droite; parce que ces ſinus ſont nés des diviſions égales de l'arc : & ſi on vouloit les multiplier par les portions égales d'une autre ligne, il faudroit l'exprimer, & dire, *la ſomme des ſinus multipliés par les portions égales d'une telle ligne.*

Il faut entendre la même choſe de la ſomme des quarrés de ces lignes & de leurs cubes, &c. Ainſi ſi on dit dans la même *Fig. 6*, *la ſomme des quarrés des ſinus DE*, il faut entendre la ſomme des ſolides faits du quarré de chaque ſinus multiplié par l'un des petits arcs égaux *DD* : & ſi dans la *Fig.* 4 on dit, *la ſomme des quarrés des arcs CM*, il faut entendre la ſomme des ſolides faits du quarré de chaque arc *CM* (étendu en ligne droite) multiplié par chacune des petites portions égales *ZZ*; & ainſi en toutes ſortes d'exemples.

En voilà certainement plus qu'il n'étoit néceſſaire pour faire entendre que le ſens de ces ſortes d'expreſſions, *la ſomme des lignes*, *la ſomme des plans*, *&c.*, n'a rien que de très-conforme à la pure Géométrie.

La

La même Méthode générale pour les centres de gravité, énoncée autrement.

UNE grandeur quelconque étant proposée, comme il a été dit, & le même ordre de plans qui la coupent : je dis que la somme de toutes les portions de cette grandeur, comprises entre un des plans extrêmes & un chacun de tous les plans, est à la grandeur entiere prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par sa balance, comme le bras sur l'autre plan extrême, c'est-à-dire, comme la distance entre son centre de gravité & cet autre plan extrême, est à la balance entiere.

Autrement encore :

Je dis que la somme de toutes les portions de la grandeur, comprises entre un des plans extrêmes & un chacun de tous les plans, est égale à la grandeur entiere multipliée par son bras sur l'autre plan extrême.

Soit proposée, par exemple, la ligne *CFB* (*Figure 3.*) : je dis que la somme des portions *CFB*, *IFB*, *GFB*, *FB*, est égale à la ligne entiere *CFB* multipliée par le bras *TA*.

Fig. 3.

Car la somme de ces lignes n'est autre chose que la somme triangulaire des portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB*, à commencer par *C* : donc la droite *BA* est une balance divisée en un nombre indéfini de parties

parties égales aux points *E*, *H*, &c., auxquels points de diviſion (comme il a déja été dit) pendent pour poids les petites portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB*, & à l'un deſquels points de diviſion ſe rencontre le centre de gravité *T*. Donc, par la ſeconde propoſition de la balance, la ſomme triangulaire de ces portions à commencer par *C*, c'eſt-à-dire, la ſimple ſomme des portions *CFB*, *IFB*, *GFB*, *FB*, eſt égale à la ſimple ſomme des petites portions *CI*, *IG*, *GF*, *FB*, c'eſt-à-dire, la ligne *CFB*, priſe autant de fois qu'il y a de points (ou de parties) dans le bras *TA*, c'eſt-à-dire, multipliée par le bras *TA*. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera de même, ſi la grandeur propoſée eſt le triligne *ABC*, que la ſomme des eſpaces *BCA*, *EFCA*, *HGCA*, *KICA*, eſt égale à l'eſpace *BCA*, multiplié par le bras *TB*. Et de même pour les ſolides, &c.

AVERTISSEMENT.

Quand j'ai parlé de la ſomme des lignes *CFB*, *IFB*, *GFB*, *FB*, on n'a dû entendre autre choſe ſinon la ſomme des rectangles compris de chacune de ces lignes, & de chacune des petites portions égales *BE*, *EH*, &c., (c'eſt-à-dire, avec chacune des diſtances égales d'entre les plans voiſins); & qu'ainſi cette multitude indéfinie de petits rectangles de même hauteur forment un plan. C'eſt ce

que

que j'ai déja aſſez dit dans les avertiſſements précédents.

De même, quand j'ai parlé de la ſomme des eſpaces *BCA*, *EFCA*, *HGCA*, *KICA*, on a dû entendre que chacun de ces eſpaces fût multiplié par chacune de ces petites diſtances égales d'entre les plans voiſins *BE*, *EH*, *&c.*, & formaſſent ainſi une multitude indéfinie de petits ſolides priſmatiques, tous de même hauteur, la ſomme deſquels formera un ſolide, qui eſt celui que l'on conſidere quand on a parlé de la ſomme de ces plans.

On doit entendre la même choſe par la ſomme des ſolides; car il faut entendre de même qu'ils ſoient tous multipliés par ces mêmes portions égales; ou au moins (ſi l'on ne veut pas admettre une quatrieme dimenſion) qu'on prenne autant de lignes droites qui ſoient entre elles en même raiſon que ces ſolides, leſquelles étant multipliées chacune par chacune de ces parties égales *BE*, *EH*, *&c.*, elles formeront un plan qui ſervira de même à trouver la raiſon cherchée. Ce qu'il ne ſera plus néceſſaire de redire.

COROLLAIRE PREMIER.

De cette méthode s'enſuit ce Corollaire : *Si la grandeur eſt donnée & la ſomme de toutes ſes portions compriſes entre un des plans extrêmes, & chacun*

cun des autres plans, & que la balance ſoit auſſi donnée : je dis que les deux bras ſeront auſſi donnés.

Soit propoſée, par exemple (*Fig.* 7.) la ligne courbe de la demi-Roulette *AYC*, laquelle ſoit ſuppoſée être donnée de grandeur, & qu'on ſache qu'elle eſt double de l'axe *CF* qui ſoit auſſi donné. Soit auſſi ſuppoſé qu'ayant mené les ordonnées *ZY*, coupants l'axe en *Z*, en un nombre indéfini de parties égales, & la Roulette aux points *Y*, la ſomme de toutes les portions *CY* de la courbe ſoit auſſi donnée : je dis que la diſtance entre le centre de gravité de cette courbe *AYC*, & la droite *AF* ſera donnée. Fig. 7.

Car la ſomme de toutes les courbes *CY* eſt donnée par l'hypotheſe ; & on ſait en effet d'ailleurs que cette ſomme eſt double de la ſomme des droites *CM*, menées de *C* aux points où les ordonnées coupent la circonférence, ou de la ſomme des droites *ZO*, (qui ſoient les ordonnées de la parabole *COG*, dont *CF* ſoit l'axe, & dont le côté droit ſoit égal à la même *CF*; car alors chaque *CM* quarré, ou *FC* en *CZ*, c'eſt-à-dire, le rectangle *FCZ*, ſera égal à *ZO* quarré) : & ainſi la ſomme des lignes courbes *CY* eſt double de l'eſpace de la parabole *CFG*, lequel étant les deux tiers de *CF* quarré, la ſomme des courbes *CY* ſera égale aux quatre tiers du quarré de *CF*.

Mais, par la précédente, la même ſomme eſt égale

le au rectangle compris de la courbe *C A* (ou de deux fois la droite *CF*), & du bras de la courbe sur *A F*. Donc quatre tiers du quarré de *CF*, sont égaux à deux fois *C F*, multipliée par le bras cherché sur *A F*; donc ce bras est donné, & égal aux deux tiers de *CF*, puisque les deux tiers de *CF*, multipliés par deux fois *CF*, sont égaux à quatre tiers du quarré de *CF*.

COROLLAIRE II.

La converse de ce Corollaire sera aussi véritable, savoir : *Si une grandeur est donnée & les bras de la balance aussi : la somme de ses portions comprises entre un des plans extrêmes, & chacun des autres, sera donnée.*

Fig. 8. Soit donné, par exemple (*Fig.* 8.) l'arc de cercle de quatre-vingt-dix dégrés *B M C*, duquel je suppose que le centre de gravité étant *Y*, son bras *Y X* soit aussi donné : je dis que la somme des arcs *B M*, compris entre le point *B* & chacune des ordonnées menées des divisions égales & indéfinies du rayon *B A*, est aussi donnée.

Car la somme de ces arcs sera égale au rectangle, compris de l'arc entier *B C* & de *Y X*, lequel rectangle étant égal, comme on le connoît d'ailleurs, au quarré du rayon *A B*; il s'ensuit aussi que la somme des arcs *B M*, est égale au même quarré du rayon *A B*.

AVERTISSEMENT.

AVERTISSEMENT.

J'ai voulu donner ces exemples de l'uſage de cette méthode, tant pour connoître les bras de la balance par la connoiſſance de la ſomme de ces portions, que pour connoître la ſomme de ces portions par la connoiſſance des bras. J'en donnerois bien ici d'autres exemples plus conſidérables; mais on les verra dans la ſuite, & je ne veux donner ici que les propoſitions qui ſervent comme de Lemmes au reſte du diſcours.

DÉFINITION.

S'il y a tant de quantités qu'on voudra *A*, *B*, *C*, leſquelles on prenne en cette ſorte : premiérement, la ſomme triangulaire de toutes, ſavoir, *ABC*, *BC*, *C*; enſuite la ſomme triangulaire de toutes, excepté la premiere, ſavoir, *BC*, *C*; puis la ſomme triangulaire de toutes, excepté les deux premieres, ſavoir, *C*, &c. :

J'appelle la ſomme de ces quantités priſes de cette ſorte, *la ſomme pyramidale* de ces mêmes quantités.

En voici la figure, où l'on voit que *la ſomme pyramidale n'eſt autre choſe que la ſomme des ſommes triangulaires* qui ſont ici ſéparées par des barres.

A	*B*	*C*
	B	*C*
		C
	B	*C*
		C
		C
1	3	6

Or

Or il eſt à remarquer que la nature de cette ſorte de combinaiſon eſt telle, que ſi on prend deux fois cette même ſomme pyramidale, comme on voit ici, & qu'on en ôte la premiere ſomme triangulaire qui eſt ſéparée du reſte par une double barre, il arrivera dans ce reſte que la premiere quantité *A* s'y trouvera une fois; la ſeconde *B*, quatre fois; la troiſieme *C*, neuf fois; & ainſi toujours ſelon la ſuite des nombres quarrés.

A	*B*	*C*
	B	*C*
		C
	B	*C*
		C
		C
A	*B*	*C*
	B	*C*
		C
	B	*C*
		C
		C
1	4	9

Et cela eſt aiſé à démontrer par la nature des combinaiſons qui forment ces ſommes triangulaires & pyramidales, qui eſt telle :

Dans les ſommes triangulaires, la premiere grandeur ſe prend une fois, la ſeconde deux fois, la troiſieme trois fois, &c., ſelon l'ordre des nombres naturels. Et dans les ſommes pyramidales la premiere grandeur ſe prend une fois, la ſeconde trois fois, la troiſieme ſix fois, &c., ſelon l'ordre des nombres triangulaires. Or tout nombre triangulaire, pris deux fois & diminué de ſon expoſant, eſt le même que le quarré de ſon expoſant; comme,

comme, par exemple, le troiſieme nombre triangulaire 6 étant doublé, eſt 12, qui diminué de l'expoſant 3, il reſte 9, qui eſt le quarré de 3.

Cela eſt aiſé par Maurolic (1); & de-là paroît la vérité de ma propoſition.

D'où il s'enſuit que s'il y a tant de quantités qu'on voudra *A*, *B*, *C*, dont la premiere ſoit multipliée par le quarré de 1, la ſeconde par le quarré de 2, la troiſieme par le quarré de 3, &c.: leur ſomme priſe de cette ſorte, ſera égale à deux fois leur ſomme pyramidale, moins leur ſomme triangulaire.

AVERTISSEMENT.

On verra dans la ſuite l'uſage de cette propriété, dans l'application qui s'en fera aux lignes droites ou courbes; & pour faciliter l'intelligence de cette application, j'en donnerai ici quelques exemples.

Soit donc dans la troiſieme Figure, par exem- Fig. 3.

(1) Maurolic, Abbé de Meſſine, fleuriſſoit vers le milieu du ſeizieme ſiecle. C'étoit un Géometre profond pour ſon temps. Nous avons de lui divers Traités, concernant la Sphere, le Comput Eccléſiaſtique, les inſtruments d'Aſtronomie, l'Arithmétique, la Perſpective, la Muſique, &c. Dans ſon Traité d'Arithmétique, il démontre pluſieurs propriétés de différentes ſuites de nombres, comme la ſuite des nombres ſimples, la ſuite des nombres quarrés, la ſuite des nombres triangulaires, &c. C'eſt à cet Ouvrage que Paſcal fait ici alluſion.

 ple,

ple, l'axe *B A* du triligne *B A C*, divisé en un nombre indéfini de parties égales, aux points *K*, *H*, *E*, d'où soient menées les ordonnées : on est assez averti par les choses précédentes, que la simple somme de ces ordonnées est égale à l'espace du triligne.

Je dis maintenant que la somme triangulaire de ces ordonnées *IK*, *GH*, *FE*, &c., à commencer du côté de la base *CA*, est la même chose que la somme des rectangles compris de chaque ordonnée, & de sa distance de la base; c'est-à-dire, la somme des rectangles *IK* en *KA*, *GH* en *HA*, *FE* en *EA*.

Ce qui est bien aisé à démontrer en cette sorte. Puisque les distances *AK*, *KH*, *HE*, sont égales, & qu'ainsi en prenant *AK* pour 1, *AH* sera 2, *AE*, 3, &c. : il s'ensuit que la somme des rectangles *IK* en *KA*, *GH* en *HA*, *FE* en *EA*, &c., n'est autre chose que *IK* multiplié par 1, *GH* par 2, *FE* par 3, &c.; ce qui n'est que la même chose que la somme triangulaire de ces droites *IK*, *GH*, *FE*, comme je l'ai montré dans le commencement.

Je dis de même que deux fois la somme pyramidale de ces mêmes ordonnées, à commencer du côté de la base *CA*, est égale à la somme des solides faits de ces mêmes ordonnées multipliées chacune par le quarré de sa distance de la base;

base; c'est-à-dire, *IK* en *KA* quarré + *GH* en *HA* quarré, &c.

Car ces quarrés étant 1, 4, 9, &c., il s'ensuit que la somme des ordonnées multipliées chacune par chacun de ces quarrés, est la même chose que leur somme pyramidale prise deux fois, moins leur somme triangulaire prise une fois. Or cette somme triangulaire n'est qu'un indivisible à l'égard des sommes pyramidales, puisqu'il y a une dimension de moins, & que c'est la même chose qu'un point à l'égard d'une ligne, ou qu'une ligne à l'égard d'un plan, ou qu'un plan à l'égard d'un solide, ou enfin qu'un fini à l'égard de l'infini; ce qui ne change point l'égalité.

Car il faut remarquer que comme la simple somme de ces lignes fait un plan, ainsi leur somme triangulaire fait un solide, qui est composé d'autant de plans qu'il y a de divisions dans l'axe; lesquels plans sont formés chacun par les simples sommes particulieres des ordonnées, dont la somme totale fait la somme triangulaire. En effet la somme triangulaire de ces ordonnées se prend ainsi: premiérement, en les prenant toutes ensemble *CA*, *IK*, *GH*, *FE*, ce qui fait un plan égal au triligne: ensuite en les prenant toutes, excepté la premiere, c'est-à-dire, *IK*, *GH*, *FE*, ce qui fait un autre plan égal au triligne *BIK*: & ensuite *GH*, *FE*, ce qui fait un autre plan égal au tri-

ligne *BGH*, &c. De ſorte qu'il y a autant de plans que de diviſions, chacun deſquels plans étant multiplié par les petites portions de l'axe, forment autant de petits ſolides priſmatiques d'égale hauteur, tous leſquels enſemble font un ſolide, comme je l'ai dit ailleurs.

De la même ſorte, la ſomme pyramidale des mêmes ordonnées fait un plan-plan, compoſé d'autant de ſolides qu'il y a de portions dans l'axe, leſquels ſolides ſont formés chacun par les ſommes triangulaires particulieres, dont la ſomme totale fait la ſomme pyramidale. Car leur ſomme pyramidale ſe prend ainſi : premiérement, en prenant la ſomme triangulaire de toutes, qui fait un ſolide, comme nous venons de dire ; & enſuite la ſomme triangulaire de toutes, excepté la premiere, qui fait un autre ſolide, &c. Et ainſi autant qu'il y aura de diviſions, il y aura auſſi de ſolides, leſquels étant multipliés chacun par une des petites diviſions de l'axe, formeront autant de petits plan-plans de même hauteur, qui tous enſemble font le plan-plan dont il s'agit.

Et l'on ne doit pas être bleſſé de cette quatrieme dimenſion, puiſque, comme je l'ai dit ailleurs, en prenant des plans au lieu des ſolides, ou même de ſimples droites, qui ſoient entre elles comme les ſommes triangulaires particulieres, qui font toutes enſemble la ſomme pyramidale : la ſomme

me de ces droites fera un plan qui tiendra lieu de ce plan-plan.

Il faut entendre la même chose des lignes courbes *BF*, *BFG*, *BFI*, *BFC*, & de leurs sommes triangulaires & pyramidales. Car tout cela est général pour toutes sortes de grandeurs, chacune selon sa nature.

Je viens maintenant aux problêmes proposés publiquement touchant la Roulette, desquels voici ceux que je proposai dans le premier Écrit au mois de Juin. Étant donnée (*Fig.* 7.) une portion quelconque *CZY*, de la demi-Roulette, retranchée par une quelconque ordonnée à l'axe; trouver: Fig. 7.

1°. La dimension & le centre de gravité de l'espace *CZY*.

2°. La dimension & le centre de gravité de son demi-solide autour de la base *ZY*, c'est-à-dire, du solide, fait par le triligne *CZY*, tourné autour de la base *ZY* d'un demi-tour seulement.

3°. La dimension & le centre de gravité de son demi-solide autour de l'axe *CZ*.

Et ceux que je proposai au commencement d'Octobre dans l'Histoire de la Roulette, sont ceux-ci:

1°. Trouver le centre de gravité de la ligne courbe *CY*.

2°. Trouver la dimension & le centre de gravité de la surface de son demi-solide autour de la base.

3°. Trouver la dimenſion & le centre de gravité de la ſurface de ſon demi-ſolide autour de l'axe.

Pour réſoudre ces problêmes, la premiere choſe que je fais, eſt de ſubſtituer à ces demi-ſolides, des onglets qui y ont un grand rapport, & dont voici la définition.

DÉFINITION.

Fig. 12. Soit un triligne rectangle *ABC*, (*Fig.* 12.) composé de deux droites *AB*, *AC*, dont celle qu'on voudra comme *AB*, ſera l'axe, & l'autre la baſe, faiſant angle droit, & de la courbe quelconque *BC*. Soient diviſées en un nombre indéfini de parties égales, tant *AB* aux points *D*, que *AC* aux points *E*, & encore la courbe même *BC* aux points *L*; & que chacune des parties de *AB*, ſoit égale à chacune des parties de *AC*, & encore à chacune des parties de la courbe *BC* (Car il ne faut pas craindre l'incommenſurabilité, puiſqu'en ôtant d'une de deux grandeurs incommenſurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commenſurables). Soient maintenant des points *D*, menées des perpendiculaires à l'axe juſqu'à la courbe, elles s'appelleront *les ordonnées à l'axe.* Soient menées des points *E*, des perpendiculaires à la baſe juſqu'à la courbe, elles s'appelleront *les ordonnées à la baſe.* Soient encore menées des point *L*, des perpendiculaires à la baſe, elles s'appelleront

pelleront *les finus fur la bafe*. Soient enfin menées des mêmes points *L*, des perpendiculaires à l'axe, elles s'appelleront *les finus fur l'axe*.

AVERTISSEMENT.

On fuppofe toujours ici que le triligne eft une figure plane, & que la courbe eft de telle forte, que tant les finus, que les ordonnées ne la rencontrent qu'en un point. Et les portions de l'axe de la bafe & de la courbe, font toutes égales, tant entre elles, que les unes aux autres.

Il faut auffi remarquer que les finus different des ordonnées, en ce que les finus naiffent des divifions égales de la courbe, & les ordonnées des divifions égales de l'axe ou de la bafe.

Soient maintenant entendues des perpendiculaires, élevées fur le plan de tous les points du triligne, qui forment un folide prifmatique infini, qui aura le triligne pour bafe, lequel foit coupé par un plan incliné paffant par l'axe, ou par la bafe du triligne : la portion de ce folide, retranchée par le plan, s'appellera *onglet*.

Que fi l'on fait au-deffous du triligne ce que je viens de figurer au-deffus; c'eft-à-dire, que les perpendiculaires de tous les points du triligne foient prolongées de l'autre part, & coupées par un autre plan également incliné de l'autre part, il fe formera au-deffous du plan du triligne un autre on-

glet, égal & ſemblable à celui du deſſus : & tous deux enſemble s'appelleront *le double onglet.*

Or il eſt viſible que tant l'onglet que le double onglet, ſera compris de trois plans & d'une portion de la ſurface *cylindracée*, laquelle portion s'appellera *la ſurface courbe de l'onglet* ou du *double onglet.*

Et l'onglet ou le double onglet, qui ſeront retranchés par des plans inclinés, paſſant par la baſe du triligne, s'appelleront *l'onglet*, ou *le double onglet de la baſe.*

Et l'onglet ou le double onglet, qui ſeront retranchés par des plans paſſant par l'axe, s'appelleront *l'onglet*, ou *le double onglet de l'axe.*

J'avertis que je ſuppoſe toujours ici que le plan qui retranche les onglets eſt incliné à celui du triligne de 45 dégrés.

Je donnerai maintenant ici les rapports qu'il y a entre le double onglet de l'axe, par exemple, & le demi-ſolide du triligne tourné à l'entour de l'axe.

Je dis donc, premiérement, que le double onglet eſt au demi-ſolide, comme le rayon au quart de la circonférence.

Fig. 10. Car ſoit entendu (*Fig.* 10.) le triligne *CFA*, tourné à l'entour de l'axe *CF*; & que le ſolide qui en ſera formé, ſoit coupé par un plan paſſant par l'axe *CF*, perpendiculaire au plan du triligne qui

coupe

coupe le ſolide en deux demi-ſolides égaux, dont je conſidérerai celui qui eſt du côté du triligne. Maintenant ſoit diviſé l'axe en un nombre indéfini de parties égales aux points *Z*, d'où ſoient menées les ordonnées *Z Y*. Soit auſſi (*Fig.* 11.) un demi-cercle quelconque *R Y S*, & le rayon *Z Y*, perpendiculaire au diametre *R S*. Soit auſſi la touchante menée du point *Y*, dans laquelle ſoient priſes *Y M*, *Y N*, égales chacune au rayon. Donc chacune des droites *Z M*, *Z N*, fera avec *Y Z* un angle de 45 dégrés (qui eſt l'angle d'inclinaiſon des plans qui engendrent le double onglet ſur le plan du triligne) & l'angle entier *M Z N* ſera droit. Fig. 11.

Maintenant (*Fig.* 10.) ſoient entendus des plans élevés ſur chacune des ordonnées *Z Y*, perpendiculairement au plan du triligne, qui coupent, tant le double onglet, que le demi-ſolide. Il eſt viſible que la figure entiere *M Y N Z R S*, repréſentera la ſection que chacun de ces plans perpendiculaires paſſant par les ordonnées *Z Y*, formeront, tant dans le double onglet, que dans le demi-ſolide autour de l'axe; c'eſt-à-dire, que les ſections que chacun de ces plans formera dans le double onglet, ſeront des triangles rectangles & iſoſceles, dont les angles droits ſeront aux points *Z* (& qui ſeront ſemblables au triangle rectangle *M Z N*), & la baſe de chacun de ces triangles ſera double de chaque ordonnée *Z Y*, de même que *M N* eſt double de *Z Y*.

ZY. Et le contenu de chaque triangle sera égal au quarré de son ordonnée; c'est-à-dire, de l'ordonnée sur laquelle il est formé, de même que le triangle *MZN* est égal au quarré de *ZY*.

Il est aussi visible que les sections que ces mêmes plans formeront dans le demi-solide, seront des demi-cercles, qui auront pour rayons les mêmes ordonnées *ZY*, & qui seront semblables au demi-cercle *RYS*; & lesquels auront par-tout aux triangles du double onglet, chacun au sien, la même raison que le demi-cercle *RYS* au triangle *MZN*.

D'où il paroît que les sections formées par les plans sur les droites *ZY*, étant toutes semblables, tant entre elles, qu'à la figure *MNZRS*; il arrivera que tous les triangles ensemble, formés dans le double onglet, seront à tous les demi-cercles ensemble formés dans le demi-solide, comme le triangle *MZN*, au demi-cercle *RYS*, ou comme le rayon, au quart de la circonférence; & qu'ainsi le double onglet sera au demi-solide, en la même raison du rayon au quart de la circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

Je dis, 2°. que les centres de gravité, tant du double onglet (lequel soit au point H *), que du demi-solide (lequel soit au point* V *) seront sur le plan du triligne.*

Cela

Cela eſt viſible, puiſque le plan du triligne ſépare en deux parties égales & toutes pareilles, tant le double onglet, que le demi-ſolide.

Je dis, 3°. que ces deux centres de gravité du double onglet & du demi-ſolide, & même celui du ſolide entier à l'entour de l'axe, ſont tous également diſtants de la baſe.

Car tous les triangles qui forment l'onglet, ſont entre eux en même raiſon que les demi-cercles qui forment le demi-ſolide; & partant en conſidérant *CF*, comme une balance, à laquelle ſoient pendus les triangles de l'onglet, ſes deux bras ſeront en même raiſon, que les deux bras de la même balance, en conſidérant qu'au lieu des triangles de l'onglet, on y pende les demi-cercles du demi-ſolide, ou même les cercles entiers qui formeroient le ſolide entier à l'entour de l'axe; & par conſéquent les centres de gravité du ſolide entier, & du demi-ſolide, & du double onglet, ſont tous également diſtants de la baſe *AF*.

Je dis, 4°. que le bras HT *(ou la diſtance entre le centre de gravité du double onglet & l'axe* CF*) eſt au bras* VT *(ou à la diſtance entre le centre de gravité du demi-ſolide & le même axe* CF*), comme le quart de la circonférence d'un cercle à ſon rayon.*

Car

Car en entendant, comme tantôt, des plans élevés perpendiculairement ſur chaque ordonnée, ils formeront des ſections dans l'onglet & dans le demi-ſolide, ſemblables au triangle *M Z N*, & au demi-cercle *R Y S*; & il arrivera que le centre de gravité de chaque triangle du double onglet, diviſera toujours l'ordonnée en même raiſon; ſavoir, aux deux tiers depuis *Z*: & qu'auſſi le centre de gravité de chaque demi-cercle diviſera toujours l'ordonnée en même raiſon; ſavoir, en la raiſon de *Z P* à *Z Y* (*Fig.* 11.), où le point *P* eſt le centre de gravité du demi-cercle *R Y S*. Donc puiſque toutes les ordonnées *Z Y* ſont diviſées aux deux tiers, par les centres de gravité des triangles qui ſont les portions du double onglet, de même que *Z Y* eſt diviſée aux deux tiers au point *O*; & que les mêmes ordonnées *Z Y* ſont auſſi toutes diviſées par les centres de gravité des demi-cercles, qui ſont les portions du demi-ſolide, en même raiſon que *Z Y* eſt diviſée au point *P*: il s'enſuit que le bras de chaque triangle eſt au bras de chaque demi-cercle, toujours en la même raiſon que *O Z*, qui eſt le bras du triangle *M Z N* ſur *R S*, à *P Z*, qui eſt auſſi le bras du demi-cercle *R Y S*, à l'égard de *R S*. Et par conſéquent le bras *HT* de tous les triangles enſemble, c'eſt-à-dire, du double onglet, eſt au bras *V T* de tous les demi-cercles enſemble, c'eſt-à-dire, du demi-ſolide, en

la même raiſon que OZ à ZP; laquelle on ſait être la même que le quart de la circonférence au rayon.

Je dis, 5°. que la ſurface courbe du double onglet eſt à la ſurface du demi-ſolide, comme le rayon au quart de la demi-circonférence.

Car, ſoit maintenant la courbe AYC, diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points Y; d'où ſoient menées les perpendiculaires ou ſinus YZ; & ſoient entendus de même des plans élevés perpendiculairement au triligne, paſſant par chacun des ſinus ZY, leſquels plans coupent, tant la ſurface courbe du double onglet, que celle du demi-ſolide. Il eſt viſible que les ſections que ces plans formeront dans la ſurface courbe du double onglet, ſeront des lignes droites, doubles des ſinus ZY, comme MN eſt double de YZ; & que les ſections que ces mêmes plans formeront dans la ſurface du demi-ſolide, ſeront des demi-circonférences, leſquelles ſeront par-tout aux droites formées dans la ſurface du double onglet, chacune à la ſienne, comme la demi-circonférence RYS, à la droite MN: & par conſéquent que toutes les droites enſemble de la ſurface courbe du double onglet, ſeront à toutes les demi-circonférences enſemble, en la même raiſon que la droite MN, à la demi-circonférence RYS, ou comme le rayon

rayon au quart de la circonférence ; mais la somme de toutes les droites de la surface de l'onglet (c'est-à-dire, la somme des rectangles compris de chacune de ces droites, & des portions égales de la courbe *AYC*, des divisions de laquelle elles sont menées) compose la surface même ; & la somme de ces demi-circonférences de la surface du demi-solide, composent cette surface même, comme d'autres l'ont démontré, & entre autres le P. Tacquet (1).

Donc la surface courbe du double onglet est à la surface du demi-solide, comme le rayon au quart de la circonférence.

Je dis, 6°. que le centre de gravité de la surface courbe du double onglet, & le centre de gravité de la surface du demi-solide, & même celui de la surface du solide entier autour de l'axe, sont tous sur le plan du triligne, & tous également distants de la base AF.

Ce qui se démontrera de même qu'on a vu pour les centres de gravité de leurs solides.

Je dis, 7°. que le point H *étant maintenant le centre de gravité de la surface courbe du double onglet,*

---

(1) Pascal a ici en vue le Traité du P. Tacquet, *de Annullaribus & Cylindricis.*

&

& le point V *étant le centre de gravité de la ſurface du demi-ſolide : le bras* H T *ſera au bras* V T, *comme le quart de la circonférence au rayon.*

Car en prenant (*Fig.* 11.) le point *I*, qui ſoit le centre de gravité de la demi-circonférence, on démontrera de même (*Fig.* 10.) que les ſinus *Y Z* ſeront tous diviſés par les centres de gravité de chaque demi-circonférence, en même raiſon que *Z Y* de la *Fig.* 11 l'eſt au point *I*. Et il eſt viſible que dans la *Fig.* 10 les points *Y* ſont les centres de gravité de chacune des droites du double onglet, & qu'ainſi les ſinus *Y Z* ſeront leurs bras. Donc les bras des droites du double onglet ſont aux bras des demi-circonférences du demi-ſolide, chacune à la ſienne, toujours en la même raiſon de *Y Z* à *Z I* (*Fig.* 11.) Donc le bras de toutes les droites enſemble (ou de la ſurface courbe du double onglet) ſera au bras de toutes les demi-circonférences enſemble (ou de la ſurface du demi-ſolide), en la même raiſon que *Y Z* à *Z I*, laquelle on ſait d'ailleurs être la même, que du quart de la circonférence au rayon.

AVERTISSEMENT.

Puiſque celle qu'on veut des deux droites d'un triligne eſt priſe pour l'axe & l'autre pour la baſe, tout ce qui a été dit de l'onglet de l'axe à l'égard du ſolide autour de l'axe, ſera de même véritable de

de l'onglet de la baſe à l'égard du ſolide à l'entour de la baſe, & ſe démontrera de même, puiſqu'il ne faudra qu'appeller *axe* la droite qui étoit appellée *baſe*, & appeller *baſe* celle qui étoit appellée *axe*.

Voilà les rapports qui ſont entre les demi-ſolides & les onglets. Par où il paroît que ſi on connoît la dimenſion & les centres de gravité des onglets & de leurs ſurfaces courbes, on connoîtra la même choſe dans les demi-ſolides, par la comparaiſon du rayon au quart de la circonférence, dont on ſuppoſe ici que la raiſon eſt donnée.

Ainſi pour réſoudre tous les problêmes propoſés, il ſuffira de trouver ces trois choſes : 1°. la dimenſion & le centre de gravité d'une portion quelconque de la Roulette *C Z Y* (*Fig.* 7.) : 2°. le centre de gravité de ſa ligne courbe *C Y* : 3°. la dimenſion & le centre de gravité des doubles onglets, tant de la baſe que de l'axe, & la dimenſion & le centre de gravité de leurs ſurfaces courbes. Ce ſont donc là les problêmes que vous verrez ici.

Or pour arriver à ces connoiſſances ſur le ſujet des portions de la Roulette en particulier, je donnerai des propoſitions univerſelles pour connoître toutes ces choſes en toutes ſortes de trilignes généralement.

C'eſt, Monſieur, ce que j'ai cru devoir vous

dire

dire avant que d'entrer en matiere, & que j'aurois pu peut-être mettre en moins de place, si j'y avois travaillé davantage; mais j'ai eu une raison particuliere de démêler de petites difficultés qui embarrassent ceux qui n'entendent pas la science des Indivisibles : auxquels ayant voulu proportionner ce discours, j'ai mis dans les Avertissements ce qui pouvoit leur être nécessaire, mais en articles détachés, afin de ne point ennuyer les autres qui n'auront qu'à les passer sans les lire. Je n'ai donc plus qu'à vous prier d'excuser les défauts que vous verrez ici, ce que j'espere de votre bonté, & de la connoissance que vous avez du peu de loisir que j'ai de m'appliquer à ces sortes d'études; ce qui fait que je vous envoie ce Discours à mesure que je l'écris : de sorte qu'il pourra bien m'arriver de répéter plus d'une fois les mêmes choses, & peut-être que je l'ai déja fait, ne me souvenant pas assez de ce que j'ai une fois envoyé.

Il me reste encore à vous dire que dans la suite de ce discours, je me servirai souvent de cette expression : *une multitude indéfinie*, ou *un nombre indéfini* de grandeurs ou de parties, &c., par où je n'entends autre chose, sinon une multitude ou un nombre plus grand qu'aucun nombre donné.

Je vous avertirai encore que j'use indifféremment de ces deux termes, *donné* ou *connu*, pour signifier une même chose : ce n'est pas que je ne

ſache qu'il y a de la différence, en ce que, ſelon Euclide & les Anciens, une grandeur eſt *donnée*, quand on peut y en donner une égale, & qu'ainſi l'eſpace du cercle eſt donné, quand ſon rayon eſt donné; au lieu qu'on ne peut pas dire abſolument qu'il ſoit *connu*, parce que le mot de *connu* enferme quelque autre choſe. Mais dans ce diſcours j'appelle *un eſpace donné* ou *connu*, celui qui a une raiſon donnée à un quarré connu; & de même j'appelle *un ſolide donné* ou *connu*, celui qui a une raiſon donnée à un parallélépipede connu : & j'appelle *raiſon donnée* ou *connue*, la raiſon de nombre connu à nombre connu, ou de droite connue à droite connue, ou de la circonférence d'un cercle à une portion connue de ſon diametre, & je n'en reçois aucune autre pour *donnée* ou *connue*.

Il m'arrivera ſouvent de marquer un même point par pluſieurs lettres, comme, par exemple (*Fig.* 31.) où le diametre *F M* étant diviſé en un nombre indéfini de parties égales aux points *O*, d'où ſont menées toutes les ordonnées, entre leſquelles je conſidere particuliérement celle qui part d'un point donné *P* : je marque de la lettre *A* tous les points où les ordonnées coupent la demi-circonférence; & je marque encore de la lettre *R* les points où les ordonnées *O A* qui ſont entre *P* & *M*, coupent la circonférence; & je marque de la lettre *I* les points où les ordonnées *O A* qui ſont entre *P* & *F*, coupent

pent la circonférence : & ainſi quand je dis les ordonnées *O A*, je les comprends toutes généralement ; quand je dis les ordonnées *O R*, je n'entends que celles qui ſont entre *P* & *M*; & de même quand je dis *O C*, j'entends celles qui ſont entre *G* & *P*, parce que le point *C* eſt marqué particuliérement pour celles-là, comme on le voit dans la Figure.

Je crois auſſi avoir oublié de vous dire, en définiſſant les trilignes rectangles, qu'encore que la ligne *B C*, qui joint les extrémités des deux droites perpendiculaires *A B*, *A C* (& qui eſt comme l'hypothénuſe du triligne) ne ſoit pas une ligne courbe, mais une ligne droite, ou ligne mixte, ce ſeroit toujours un triligne rectiligne ou mixtiligne : pourvu que cette condition s'y rencontre, que les ordonnées, tant à l'axe qu'à la baſe, ne coupent jamais l'hypothénuſe du triligne en deux points. Ainſi un triangle rectangle ſera un triligne rectiligne ; & ainſi (*Fig.* 13 & 14.) le triangle *B A C F B* eſt un triligne, dont les deux droites ſont *B A*, *A C*, & l'hypothénuſe eſt la courbe *B F C* (*Fig.* 13.), où la ligne mixte *B F C* (*Fig.* 14.) compoſée de la courbe *C F* & de la droite *F B* parallele à la baſe *A C* : toutes leſquelles ſortes de trilignes ſont conſidérées ici généralement, le Diſcours devant s'entendre de tous ſans exception.



TRAITÉ DES TRILIGNES RECTANGLES, ET DE LEURS ONGLETS.

LEMME GÉNÉRAL.

Fig. 11. *SOIT un triligne rectangle quelconque* (Fig. 11.) *tel qu'il a été défini dans la Lettre précédente* ABC, *dont les ordonnées à l'axe ſoient* DF, & *les ordonnées à la baſe ſoient* EG, *coupant la courbe en* G; *d'où ſoient remenées des perpendiculaires* GR *à l'axe, prolongées indéfiniment, & leſquelles j'appelle* les contre-ordonnées: *ſoient auſſi prolongées indéfiniment les ordonnées à l'axe. Et ſoit ſur l'axe* AB, *& de l'autre côté du triligne, une figure quelconque* BKOA, *dans le même plan, compriſe entre les paralleles extrêmes* CA, BK, (*cette figure s'appellera l'*adjointe *du triligne*). *Que cette figure adjointe ſoit coupée par les ordonnées* FD, *aux points* O, *& par les contre-ordonnées* GR, *aux points* I. *Je dis que la ſomme des rectangles* FD *en* DO, *compris de chaque ordonnée du triligne & de chaque ordonnée de la figure adjointe, eſt égale à la ſomme des eſpaces* ARI, *qui ſont les portions de l'adjointe, compriſes depuis chacune des contre-ordonnées,*

ordonnées, jusqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de A.

Car ſoit entendu le triligne *B A C* être multiplié par la figure *B A O K*, & former par ce moyen un certain ſolide : c'eſt-à-dire, ſoient de tous les points du triligne *A B C*, élevées des perpendiculaires au plan, qui forment un ſolide priſmatique infini, ayant le triligne *A B C* pour baſe. Soit auſſi entendue la figure *B A O K*, tournant ſur l'axe *B A*, relevée perpendiculairement au plan du triligne *A B C*; & ſoit enfin entendue la baſe *A C* s'élever toujours parallélement à ſoi-même, le point *A* parcourant toujours le bord de la figure relevée *A O I K B*, juſqu'à ce qu'elle retombe au point *B* : la portion du ſolide priſmatique infini, retranchée par la ſurface décrite par la ligne *C A* dans ſon mouvement, ſera le ſolide que l'on conſidere ici, laquelle ſera compriſe de quatre ſurfaces, entre leſquelles le triligne tiendra lieu de baſe.

Soient maintenant entendus deux ordres de plans perpendiculaires à celui du triligne, les uns paſſant par les ordonnées *D F* à l'axe (leſquels coupant le ſolide, donneront pour ſections les rectangles *F D* en *D O*, compris de chaque ordonnée *D F*, & de chaque ordonnée *D O* de la figure adjointe) : & les autres plans paſſant par les ordonnées *G E*, leſquels ſeront paralleles à l'adjointe *B A O K*, relevée comme il a été dit, & coupant le même ſolide,

lide, formeront pour sections des figures égales & toutes semblables aux portions *RIA*, comprises depuis chaque contre-ordonnée *RI*, jusqu'à l'extrémité de la figure du côté de *A* (ce qui paroît par les parallélismes, tant de chacun de ces plans avec l'adjointe relevée, que de la ligne *AC* avec soi-même dans tout son mouvement). Or il est visible que les sommes des sections, faites par chacun de ces ordres de plans, sont égales chacune au solide, & par conséquent entre elles (puisque les portions indéfinies *AE*, *EE*, &c. de la base, sont égales, tant entre elles, qu'aux portions égales & indéfinies *AD*, *DD*, &c. de l'axe); c'est-à-dire, que la somme de tous les rectangles *FD* en *DO*, est égale à la somme de toutes les portions *RIA*: ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Fig. 15. *Soit* ABK (Fig. 15.) *un triangle rectangle & isoscèle, dont* B *soit l'angle droit; soit aussi* AIK *une parabole dont* A *soit le sommet*, AB *la touchante au sommet, &* AB *ou* BK *le côté droit; & soit une droite quelconque* RIV, *parallele à* BK, *coupant* AB *en* R, *la parabole en* I, *& la droite* AK *en* V.

Je dis, 1°. que le triangle isoscele ARV *est égal à la moitié de* AR *quarré*. Cela est visible.

Je dis, 2°. que le triligne parabolique ARI, *multiplié par* AB, *est égal au tiers de* AR *cube.*

Car

Car le triligne *ARI*, par la nature de la parabole, eſt le tiers du rectangle *AR* en *RI*. Donc en multipliant le tout par *AB*, le triligne *ARI* multiplié par *AB*, ſera le tiers du ſolide de *AR* en *RI* en *AB*; c'eſt-à-dire, de *AR* cube, puiſque *RI* en *AB*, eſt égal à *AR* quarré.

Je dis, 3°. que ſi AIK *eſt une parabole cubique (c'eſt-à-dire, que les cubes des ordonnées ſoient entre eux comme les portions de l'axe, ou, ce qui eſt la même choſe, que* AB *quarré en* RI, *ſoit toujours égal à* AR *cube) : le triligne* ARI, *multiplié par* AB *quarré, ſera égal au quart de* AR *quarré-quarré.*

Car, par la nature de cette parabole, le triligne *ARI* eſt le quart du rectangle *AR* en *RI*; donc en multipliant le tout par *AB* quarré, on démontrera le reſte comme en l'article précédent.

Et de même pour les autres paraboles quarré-quarrées, quarré-cubiques, &c.

RAPPORTS entre les ordonnées à l'axe & les ordonnées à la baſe d'un triligne rectangle quelconque.

PROPOSITION PREMIERE.

LA ſomme des ordonnées à la baſe eſt la même que la ſomme des ordonnées à l'axe.

Car l'une & l'autre eſt égale à l'eſpace du triligne.

PROPOSITION II.

La somme des quarrés des ordonnées à la base est double des rectangles compris de chaque ordonnée à l'axe, & de sa distance de la base; c'est-à-dire, Fig. 13. (Fig. 13.) *que la somme de tous les* EG *quarré est double de la somme de tous les rectangles* FD *en* DA.

Car si le triligne *ABC* a pour adjointe un triangle rectangle & isoscele *ABK*, dont les côtés *AB*, *BK* soient égaux entre eux, & la base *AK* une ligne droite qui soit coupée par les ordonnées *FD*, aux points *O*, & par les contre-ordonnées *GR*, aux points *I*; il arrivera, comme il a été démontré, que la somme de tous les rectangles *FD* en *DO*, ou *FD* en *DA* (puisque par-tout *DO* sera égale à *DA*), sera égale à la somme de tous les triangles *ARI*; c'est-à-dire, par le Lemme précédent, à la moitié de la somme de tous les *AR* quarré, ou de tous les *EG* quarré.

COROLLAIRE.

Donc la somme des quarrés des ordonnées à la base est double de la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.

Car la somme des rectangles *FD* en *DA*, est la même chose que la somme triangulaire des ordonnées *FD*, à commencer du côté de *A*, comme il a été démontré dans la Lettre à M. de Carcavi.

PROPOSITION

PROPOSITION III.

La ſomme des cubes des ordonnées à la baſe eſt triple des ſolides, compris de chaque ordonnée à l'axe, & du quarré de ſa diſtance de la baſe : la ſomme de tous les EG *cube eſt triple de la ſomme de tous les* FD en DA *quarré.*

Car ſi la figure adjointe *ABK* eſt composée des deux droites perpendiculaires *AB*, *BK*, & de la parabole *AOK*, telle qu'elle a été ſuppoſée dans le Lemme précédent; il arrivera toujours, par le Lemme général, que la ſomme des rectangles *FD* en *DO*, ſera égale à la ſomme des portions *ARI* qui ſeront ici des trilignes paraboliques. Donc en multipliant le tout par *BA*, la ſomme des ſolides *FD* en *DO* en *AB*, ou *FD* en *DA* quarré, ſera égale à la ſomme des trilignes *ARI*, multipliés par *AB*; c'eſt-à-dire, par le Lemme précédent, au tiers de la ſomme des *AR* cube, ou des *EG* cube.

COROLLAIRE.

Donc la ſomme des cubes des ordonnées à la baſe eſt égale à ſix fois la ſomme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la baſe.

Car la ſomme des *EG* cube eſt triple de la ſomme des *FD* en *DA* quarré; & la ſomme des *FD* en *DA* quarré eſt double de la ſomme pyramidale des ordonnées *FD*, à commencer du côté

de

de *A*, comme il a été démontré dans la même Lettre.

PROPOSITION IV.

On démontrera de même que la ſomme des quarré-quarrés des ordonnées à la baſe, eſt quadruple de la ſomme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le cube de ſa diſtance de la baſe ; & ainſi toujours.

AVERTISSEMENT.

Puiſque celle qu'on veut des deux droites d'un triligne eſt priſe pour l'axe & l'autre pour la baſe, tout ce qui a été dit des ordonnées à la baſe, à l'égard des ordonnées à l'axe, pourra ſe dire de même des ordonnées à l'axe, à l'égard des ordonnées à la baſe.

PROPOSITION V.

La ſomme des ſolides compris du quarré de chaque ordonnée à la baſe, & de ſa diſtance de l'axe, eſt égale à la ſomme des ſolides, compris du quarré de chaque ordonnée à l'axe & de ſa diſtance de la baſe : je dis que la ſomme des ſolides de tous les EG *quarré en* EA, *eſt égale à la ſomme des ſolides de tous les* DF *quarré en* DA.

Ou ce qui eſt la même choſe :

La ſomme triangulaire des quarrés des ordonnées à la baſe, eſt égale à la ſomme triangulaire des quarrés des ordonnées à l'axe, en commençant tou-

jours

jours du côté du centre du triligne; c'est-à-dire, du point où l'axe & la base se coupent : je dis que la somme triangulaire de tous les EG *quarré, est égale à la somme triangulaire de tous les* DF *quarré, en commençant toujours du côté de* A.

Car si on entend que le double onglet de la base soit formé sur le triligne *CAB*, dont le centre de gravité soit au point *Y*, d'où soient menées les perpendiculaires *YX*, *YZ*, qui seront les bras sur l'axe & sur la base, & qu'on entende que ce double onglet soit coupé par des plans perpendiculaires au triligne, passant par les ordonnées *EG*; il est visible que les sections que ces plans donneront dans le double onglet, seront des triangles rectangles & isoscelés, égaux chacun au quarré de son ordonnée *EG*; comme on l'a vu dans la Lettre (*Fig.* 10 *&* 11.) où il a été montré que le triangle rectangle & isoscele *MZN*, qui représente les triangles de ces sections, est égal au quarré de *ZY*, qui représente les ordonnées.

Maintenant soit entendu le même double onglet, coupé par un autre ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, & passant par les ordonnées *DF*, lesquels donneront pour sections dans le double onglet, des rectangles qui auront la base chacun égale à son ordonnée *DF*, & la hauteur égale à deux fois *AD* : tous lesquels rectangles seront coupés en deux également par les ordonnées

ordonnées *DF*; & partant les centres de gravité de ces rectangles seront aux points *Q*, où chaque ordonnée est coupée par la moitié, & les droites *QD* seront leurs bras sur *BA*; c'est-à-dire, la distance entre leur centre de gravité & *BA*.

Or il est visible que la somme de ces rectangles compose le solide du double onglet, & que la somme des triangles, formés par l'autre ordre de plans *EG*, compose aussi le même solide du double onglet; & qu'ainsi la somme des uns n'est que la même chose que la somme des autres; & que chacune des deux n'est que la même chose que le solide du double onglet : d'où il paroît qu'aussi la somme triangulaire des portions du solide, comprises entre tous les plans voisins du premier ordre *EG*, est la même chose que la somme triangulaire des triangles formés par les plans *EG*; & que ce n'est encore que la même chose que la somme triangulaire des portions des rectangles formés par les plans *FD*, comprises toujours entre tous les mêmes plans voisins du premier ordre *EG*.

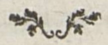
Mais, par la méthode générale des centres de gravité, la somme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, comprises entre les plans *EG*, est égale à chaque rectangle multiplié par son bras *QD* sur l'axe *AB*; donc la somme de ces rectangles multipliés chacun par *QD*, est égale à la somme triangulaire des triangles formés par les

les plans *EG* (à commencer toujours du côté de *AB*).

Mais chacun de ces triangles, formés par les plans *EG*, eſt égal à chaque *EG* quarré; & chacun des rectangles formés par les plans *FD*, eſt égal à deux fois chaque *AD* en *DF*; donc la ſomme triangulaire de tous les *EG* quarré, eſt égale à la ſimple ſomme de deux fois tous les *AD* en *DF* multipliés par *DQ*; c'eſt-à-dire, à la ſimple ſomme de tous les *AD* en *DF* quarré; (ou ce qui n'eſt que la même choſe, puiſque le premier *AD* eſt 1, le ſecond *AD*, 2, &c.), à la ſomme triangulaire de tous les *DF* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

On a été aſſez averti dans la Lettre, que la quatrieme dimenſion n'eſt point contre la pure Géométrie; puiſqu'en ſubſtituant, tant aux *EG* quarré, qu'aux rectangles *AD* en *DF*, des droites qui ſoient entre elles en même raiſon que ces quarrés & ces rectangles, on démontrera la même choſe par la même maniere, ſans aucun changement & ſans quatrieme dimenſion.



RAPPORTS

RAPPORTS entre les ſinus ſur la baſe d'un triligne quelconque, & les portions de ſa ligne courbe compriſes entre le ſommet & les ordonnées à l'axe.

DÉFINITION.

ON appelle ici *arcs* non-ſeulement les portions des circonférences de cercle, mais encore les portions de toutes ſortes de lignes courbes.

HYPOTHESE GÉNÉRALE.

Soit un triligne rectangle quelconque *B A H*
Fig. 16. (*Fig.* 16.), & ſoit le même triligne *B A P*, renverſé de l'autre part de l'axe *B A*, & qu'ainſi les deux baſes égales *H A*, *A P*, ne faſſent qu'une même ligne droite; ſoit diviſé, tant l'axe, que la courbe *B P*, en un nombre indéfini de parties toutes égales entre elles; c'eſt-à-dire, que les parties de l'axe *B D*, *D D*, &c. ſoient égales, tant entre elles, qu'aux parties égales de la courbe *B I*, *I I*, &c. Soient menées les ordonnées *D O* à l'axe, & les ſinus *I L* ſur la baſe.

Les rapports qui ſe trouvent entre la ſomme des ſinus *I L*, & la ſomme des arcs ou des portions *B O* de la courbe (compriſes entre le point *B* & chacune des ordonnées à l'axe) ſeront les ſuivants.

PROPOSITION

PROPOSITION VI.

La ſomme des arcs de la courbe, compris entre le ſommet & châque ordonnée à l'axe, eſt égale à la ſomme des ſinus ſur la baſe; c'eſt-à-dire, que la ſomme de tous les arcs BO, *eſt égale à la ſomme des ſinus* IL.

PROPOSITION VII.

La ſomme des quarrés de ces mêmes arcs BO, *eſt égale à deux fois la ſomme triangulaire des mêmes ſinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION VIII.

La ſomme des cubes de ces mêmes arcs BO, *eſt égale à ſix fois la ſomme pyramidale des mêmes ſinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION IX.

La ſomme triangulaire des mêmes arcs BO, *à commencer par* A, *eſt égale à la moitié de la ſomme des quarrés des mêmes ſinus* IL.

PROPOSITION X.

La ſomme pyramidale des mêmes arcs BO, *à commencer par* A, *eſt égale à la ſixieme partie des cubes des mêmes ſinus* IL.

PROPOSITION XI.

La ſomme triangulaire des quarrés des mêmes arcs BO,

BO, *à commencer par* A, *est égale à la somme triangulaire des quarrés des mêmes sinus* IL, *à commencer par* A.

PROPOSITION XII.

Je dis maintenant qu'en menant les sinus sur l'axe, savoir, les perpendiculaires IR; *la somme des rectangles compris de chacun des mêmes arcs & de l'ordonnée qui le termine, savoir, la somme de tous les rectangles* BO *en* OD, *est égale à la somme des portions du triligne, comprises entre chaque sinus sur l'axe & la base, savoir, à la somme de toutes les portions* IRAP.

PROPOSITION XIII.

La somme des quarrés de chaque arc, multiplié par son ordonnée, c'est-à-dire, de tous les BO *quarré en* OD, *est double de la somme triangulaire de ces mêmes portions* IRAP *du triligne, entre la base & chaque sinus sur l'axe, à commencer du côté de* B.

PROPOSITION XIV.

La somme triangulaire des rectangles de chaque ordonnée avec son arc, c'est-à-dire, la somme triangulaire de tous les BO *en* OD, *à commencer par* A, *ou, ce qui est la même chose, la somme de tous les solides* AD *en* DO *en* OB, *compris de chaque arc, de son ordonnée, & de la distance entre*

l'ordonnée

l'ordonnée & la base, est égale à la somme de ces portions IRAP *du triligne, multipliées chacune par son bras sur la base* AP, *c'est-à-dire, par la perpendiculaire, menée sur* AP *du centre de gravité de chaque portion* IRAP.

PROPOSITION XV.

La somme des arcs multipliés chacun par le quarré de son ordonnée, c'est-à-dire, de tous les BO *en* OD *quarré, est double de la somme de ces portions* IRAP *du triligne, multipliées chacune par son bras sur l'axe* AB, *c'est-à-dire, par la perpendiculaire sur* AB, *menée du centre de gravité de chaque portion* IRAP.

PRÉPARATION A LA DÉMONSTRATION (F. 16.) Fig. 16.

Soit prise dans la droite *AH* prolongée, la portion *AC* égale à la ligne courbe *BIP* ou *BOH*; & ayant divisé *AC* en autant de parties égales qu'il y en a dans la courbe *BIP*, aux points *E*, & qu'ainsi chacune des portions *AE*, *EE*, &c. soit égale à chacun des arcs *BI*, *II*, &c.; soient des points *E*, menées des perpendiculaires *EG*, qui rencontrent les sinus *IR* sur l'axe, prolongés s'il le faut, aux points *G*; de sorte que chacune des droites *EG*, soit égale à chacun des sinus *IL* sur la base, & que par tous les points *B*, *G*, *G*, *C*, soit entendue passer une ligne courbe, dont les droites

EG ſeront les ordonnées à la baſe, & les droites *GR* en ſeront les contre-ordonnées : la nature de cette ligne ſera telle, que quelque point qu'on y prenne *G*, d'où on mene les droites *GE*, *GRI*, paralleles à l'axe & à la baſe, il arrivera toujours que la portion *AE*, ou la droite *RG*, ſera égale à l'arc *BI*, & la portion reſtante *EC*, à l'arc reſtant *IP* : & par ce moyen les ordonnées *DO* à l'axe étant prolongées, & la coupant en *F*, chacune des droites *DF* ſera égale à chacun des arcs *BO*, compris entre l'ordonnée même *DF* & le ſommet.

Cela poſé, la démonſtration des propoſitions 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, qui viennent d'être énoncées, ſera facile.

Démonstration de la Proposition VI.

Je dis que la ſomme de tous les arcs *BO* eſt égale à la ſomme des ſinus *IL*.

Car tous les arcs *BO* ſont les mêmes que toutes les ordonnées *DF* à l'axe, dont la ſomme eſt égale à celle des ordonnées *EG*, par la premiere propoſition, c'eſt-à-dire, à la ſomme des ſinus *IL*.

Démonstration de la Proposition VII.

Je dis que la ſomme des arcs *BO* quarré eſt double de la ſomme triangulaire des ſinus *IL*, à commencer par *A*, ou que la ſomme des *DF*

quarré

quarré eſt double de la ſomme triangulaire des ordonnées *EG*, à commencer par *A* : ce qui eſt démontré par le Corollaire de la ſeconde propoſition.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VIII.

Je dis que la ſomme des arcs *BO* cube eſt égale à ſix fois la ſomme pyramidale des mêmes ſinus *IL*, à commencer par *A*, ou que la ſomme de tous les *DF* cube eſt égale à ſix fois la ſomme pyramidale de toutes les *EG*, à commencer par *A* : ce qui a été démontré par la troiſieme.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IX.

Je dis que la ſomme triangulaire des arcs *BO*, à commencer par *A*, eſt égale à la moitié de la ſomme des quarrés des ſinus *IL*, ou que la ſomme triangulaire des ordonnées *DF*, à commencer par *A*, eſt égale à la moitié de la ſomme des quarrés des ordonnées *EG* : ce qui eſt démontré par le même Corollaire de la ſeconde.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION X.

Je dis que la ſomme pyramidale des arcs *BO*, à commencer par *A*, eſt égale à la ſixieme partie de la ſomme des cubes des ſinus *IL*, ou que la ſomme pyramidale des ordonnées *DF*, à commencer par *A*, eſt égale à la ſixieme partie de la ſomme des cubes des ordonnées *EG* : ce qui a été démontré par le Corollaire de la troiſieme.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XI.

Je dis que la ſomme triangulaire des arcs *BO* quarré, eſt égale à la ſomme triangulaire des ſinus *IL* quarré, à commencer toujours par *A*, ou que la ſomme triangulaire des ordonnées *DF* quarré eſt égale à la ſomme triangulaire des ordonnées *EG* quarré, à commencer toujours par *A* : ce qui a été démontré par la cinquieme.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XII.

Je dis que la ſomme des rectangles *BO* en *OD*, ou *FD* en *DO*, eſt égale à la ſomme des portions *IRAP*.

C'eſt la même choſe que ce qui a été démontré dans le Lemme général. Car en conſidérant le triligne *BAP* comme étant la figure adjointe du triligne *BAC*, il s'enſuit, par ce qui a été démontré dans ce Lemme, que la ſomme des rectangles *FD* en *DO* (compris de chaque ordonnée *DF* du triligne *BAC*, & de chaque ordonnée *DO* du triligne *BAP*), eſt égale à la ſomme des portions *ARIP* de la figure adjointe, compriſes entre chaque contre-ordonnée *RI* & la droite *AP*, & que les unes & les autres compoſent un même ſolide.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XIII.

Je dis que la ſomme de tous les *BO* quarré en

en *OD*, ou *FD* quarré en *DO*, eſt double de la ſomme triangulaire des mêmes portions *ARIP*, à commencer du côté de *B* : ou que cette ſomme triangulaire des portions *ARIP* eſt égale à la ſomme des ſolides *QD* en *FD* en *DO* (qui ſont la moitié des *FD* quarré en *DO*, chaque *FD* étant diviſée par la moitié en *Q*).

Car ſoit entendue la figure adjointe *BAP* relevée perpendiculairement au plan du triligne *BAC*, & former le ſolide dont il a été parlé dans le Lemme général, qui ſoit coupé par deux ordres de plans perpendiculaires au triligne, les uns paſſant par les droites *EG* & les autres par les droites *DF*; les uns donnant pour ſections des figures pareilles aux eſpaces *ARIP*, & les autres donnant pour ſections les rectangles *FD* en *DO*, comme cela a été dit dans le Lemme général : & ainſi ce ſolide ſera compoſé de la ſomme des eſpaces *ARIP*, & le même ſolide eſt auſſi compoſé de la ſomme des rectangles *FD* en *DO* : d'où il s'enſuit que la ſomme des portions *ARIP*, élevées perpendiculairement au plan *ABC* ſur les droites *EG*; & la ſomme des rectangles *FDO*, élevés auſſi perpendiculairement au même plan *ABC*, ne ſont qu'une même choſe, tant entre elles, qu'avec le ſolide : & par conſéquent que la ſomme triangulaire des portions du ſolide, compriſes entre tous les plans *EG*, à commencer du

côté de *AB*, eſt la même choſe que la ſomme triangulaire des eſpaces *ARIP*; & que c'eſt auſſi la même choſe que la ſomme triangulaire des portions de chaque rectangle *FD* en *DO*, compriſes entre tous les mêmes plans *EG*.

Mais, par la méthode générale des centres de gravité, la ſomme triangulaire des portions de chacun de ces rectangles, compriſes entre les plans *EG*, à commencer du côté de *AB*, eſt égale à chaque rectangle multiplié par ſon bras *QD* ſur *AB*; donc auſſi la ſomme des rectangles *FDO*, multipliés chacun par ſon bras *QD*, eſt égale à la ſomme triangulaire des portions *ARIP*, à commencer par *B*. Ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XIV.

Je dis que la ſomme triangulaire de tous les *BO* en *OD*, ou *FD* en *DO*, à commencer par *A*, eſt égale à la ſomme de ces eſpaces *IRAP*, multipliés chacun par ſon bras ſur la baſe *AP*.

Car en relevant le triligne adjoint *BAP*, qui formera le ſolide coupé par les deux ordres de plans, comme en l'article précédent, deſquels les uns forment pour ſections les eſpaces pareils à *ARIP*, & les autres les rectangles *FD* en *DO*, la ſomme de chacun, c'eſt-à-dire, tant des eſpaces *ARIP*, que des rectangles *FD* en *DO*, ne ſont qu'une même choſe que le ſolide. D'où il eſt évident

dent que la ſomme triangulaire des portions du ſolide, compriſes entre tous les plans *FD*, eſt la même choſe que la ſomme triangulaire de tous les rectangles *FD* en *DO*; & que c'eſt auſſi la même choſe que la ſomme triangulaire des portions des eſpaces *ARIP*, compriſes entre tous les mêmes plans *FD*.

Mais la ſomme triangulaire de chaque eſpace *ARIP*, compris entre les plans *FD*, à commencer du côté de *AP*, eſt égale (par la méthode générale des centres de gravité) à chaque eſpace *ARIP*, multiplié par ſon bras ſur *AP* : donc auſſi la ſomme de ces eſpaces *ARIP*, multipliés chacun par ſon bras ſur *AP*, eſt égale à la ſomme triangulaire des rectangles *FDO*, à commencer par *A*. Ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION XV.

Je dis que la ſomme de tous les *DO* quarré en *OB*, ou de tous les *FD* en *DO* quarré, eſt double de la ſomme des portions *ARIP*, multipliées chacune par ſon bras ſur l'axe *BA*; ou que la ſomme des ſolides *FD* en *DO* en *DS*, qui eſt la moitié des *FD* en *DO* quarré (chaque *DO* étant diviſé par la moitié en *S*) eſt égale à la ſomme des eſpaces *ARIP*, multipliés chacun par ſon bras ſur l'axe *AB*.

Car ſoit relevé de même le triligne adjoint

BAP, qui formera un ſolide coupé par les deux ordres de plans ſur *EG* & *DF*, qui donnent pour ſections dans le ſolide, les rectangles *FDO* & les eſpaces *ARIP*, qui ſont tels que la ſomme des rectangles *FDO* & la ſomme des eſpaces *ARIP*, ne ſont qu'une même choſe, tant entre elles, qu'avec le ſolide.

Soit maintenant entendu un troiſieme ordre de plans, paralleles à celui du triligne & élevés au-deſſus du plan du triligne, & tous en diſtances égales l'un de l'autre; en ſorte qu'ils diviſent la droite *AP* (relevée perpendiculairement au plan du triligne) en un nombre indéfini de parties égales : & qu'ainſi ils coupent le ſolide en un nombre indéfini de parties, compriſes chacune entre deux quelconques plans voiſins.

Donc puiſque ces trois choſes ne ſont qu'une même; ſavoir, la ſomme des rectangles *FDO*, relevés ſur les droites *FD*, la ſomme des eſpaces *ARIP*, relevés ſur les droites *EG*, & le ſolide: il s'enſuit que la ſomme triangulaire de toutes les portions des eſpaces *ARIP*, compriſes entre tous les plans voiſins de ce troiſieme ordre, eſt la même que la ſomme triangulaire de toutes les portions des rectangles *FD* en *DO*, compriſes entre les mêmes plans voiſins de ce même troiſieme ordre, à commencer toujours du côté d'en-bas, c'eſt-à-dire, du côté du triligne *ABC*, qui ſert de baſe au ſolide.

Mais;

Mais la ſomme triangulaire des portions de chaque eſpace *ARIP*, compriſes entre les plans voiſins du troiſieme ordre, eſt égale à chaque eſpace *ARIP*, multiplié par ſon bras ſur l'axe *AB* : & de même la ſomme triangulaire des portions de chaque rectangle *FDO*, compriſes entre les mêmes plans du troiſieme ordre, eſt égale à chaque rectangle *FDO*, multiplié par ſon bras ſur l'axe, ou à chaque rectangle *FDO*, multiplié par *SD* (car *SD* eſt le bras ſur l'axe), c'eſt-à-dire, à chaque ſolide *FD* en *DO* en *DS*.

Donc la ſomme de tous les *FD* en *DO* en *DS*, eſt égale à la ſomme des eſpaces *ARIP*, multipliés chacun par ſon bras ſur l'axe *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

MÉTHODE générale pour trouver la dimenſion & les centres de gravité d'un triligne quelconque & de ſes doubles onglets, par la ſeule connoiſſance des ordonnées à l'axe ou à la baſe.

POUR trouver la dimenſion, tant du triligne, que de ſes doubles onglets, & leurs centres de gravité ; c'eſt-à-dire, la diſtance entre leurs centres de gravité & la baſe du triligne, & la diſtance entre leurs mêmes centres de gravité & l'axe du triligne,

ou,

ou, ce qui est la même chose, leurs bras sur la base & sur l'axe : je me suis servi d'une méthode qui réduit tous ces problêmes à la connoissance des seules ordonnées ; c'est-à-dire, à la connoissance de leurs sommes simples, triangulaires & pyramidales ou de leurs puissances, comme on va le voir ici.

Je dis donc que si on connoît dans un triligne toutes les choses suivantes :

1°. *La somme des ordonnées à l'axe.*

2°. *La somme des quarrés de ces ordonnées.*

3°. *La somme des cubes de ces ordonnées.*

4°. *La somme triangulaire de ces ordonnées.*

5°. *La somme triangulaire des quarrés de ces ordonnées.*

6°. *La somme pyramidale de ces ordonnées.*

On connoîtra aussi la dimension & les centres de gravité, tant du triligne, que de ses doubles onglets ; c'est-à-dire, qu'on connoîtra aussi les choses suivantes :

1°. *La dimension de l'espace du triligne.*

2°. *Le bras du triligne sur l'axe.*

3°. *Le bras du triligne sur la base.*

4°. *La dimension du double onglet de la base.*

5°. *Le bras de cet onglet sur la base.*

6°. *Le bras de cet onglet sur l'axe.*

7°. *La dimension du double onglet de l'axe.*

8°. *Le bras de cet onglet sur la base.*

9°. *Le bras de cet onglet sur l'axe.*

Car,

Car, pour le premier point, la ſomme des ordonnées étant connue, l'eſpace du triligne ſera auſſi connu, puiſqu'il lui eſt égal.

Pour le deuxieme : ſoit le triligne *B A C* (*Fig.* 13.) dont *AB* ſoit l'axe & *A C* la baſe ; *D F* les ordonnées à l'axe, dont on connoiſſe la ſimple ſomme, la ſomme des quarrés & les autres choſes qui ont été ſuppoſées : ſoient *E G*, les ordonnées à la baſe, & ſoit *Y* le centre de gravité du triligne ; & ſoient les deux bras *YD*, *Y E*, ſur l'axe & ſur la baſe : je dis que le bras *Y D* ſur l'axe ſera connu. Fig. 13.

Car puiſque la ſomme des *D F* quarré eſt connue par l'hypotheſe, la ſomme triangulaire des ordonnées *E G*, à commencer par *A*, le ſera auſſi (puiſqu'elle en eſt la moitié, par le Corollaire de la ſeconde propoſition). Et par conſéquent le bras *YD* ſera auſſi connu, puiſqu'il a été montré par la Lettre, que cette ſomme triangulaire des ordonnées *E G*, laquelle eſt connue, eſt égale au ſolide fait du triligne *A B C*, multiplié par ſon bras *Y D* ſur *A B*, lequel ſolide ſera par conſéquent connu : mais l'eſpace du triligne *A B C* eſt connu par le premier article. Donc auſſi *Y D* ſera connu.

Pour le troiſieme ; ſavoir, que le bras *YE* du triligne ſur la baſe ſera connu : cela eſt viſible, puiſque la ſomme triangulaire des ordonnées *F D*

qui

(qui eſt connue par l'hypotheſe) eſt égale au ſolide fait du triligne, multiplié par ſon bras *YE*, lequel ſolide ſera par conſéquent connu; mais l'eſpace du triligne eſt connu, par le premier article. Donc auſſi le bras *YE* ſera connu.

Pour le quatrieme : je dis que le contenu du double onglet de la baſe ſera connu.

Car le contenu de ce double onglet eſt compoſé de deux fois la ſomme des rectangles *FD* en *DA*, ou de tous les *EG* quarré, comme cela a été aſſez montré dans la cinquieme propoſition, où l'on a fait voir que ſi on entend que le double onglet ſoit coupé par un ordre de plans perpendiculaires à celui du triligne, paſſant par les ordonnées *FD*, & s'étendant infiniment de part & d'autre : leurs ſections dans le double onglet ſeront des rectangles, dont chacun ſera double de chaque rectangle *AD* en *DF* : & qu'en coupant ce même double onglet par un autre ordre de plans perpendiculaires, paſſant par toutes les droites *EG*, leurs ſections dans le double onglet ſeront des triangles rectangles, dont chacun ſera égal au quarré de chaque ordonnée *EG*.

Donc ſi la ſomme des *EG* quarré eſt connue, le contenu du double onglet le ſera auſſi. Or la ſomme, tant de ces quarrés *EG*, que de deux fois la ſomme de ces rectangles *FD* en *DA* eſt connue,

nue, puiſque (par le Corollaire de la ſeconde) c'eſt la même choſe que deux fois la ſomme triangulaire des ordonnées *DF*, à commencer par *A* (qui eſt donnée par l'hypotheſe).

D'où il s'enſuit que le contenu du double onglet eſt auſſi connu.

Pour le cinquieme : ſoit maintenant *Y*, le centre de gravité du double onglet de la baſe : je dis que ſon bras *YE* ſur la baſe ſera connu ; & que le double onglet multiplié par le bras *YE*, eſt égal à quatre fois la ſomme pyramidale des ordonnées *DF*, à commencer par *A*, ou, ce qui eſt la même choſe, comme on l'a vu dans la Lettre, à deux fois la ſomme de tous les *AD* quarré en *DF*; ce qui ſe démontrera ainſi.

La ſomme de tous les *AD* quarré en *DF*, eſt la même choſe que la ſomme de tous les rectangles *AD* en *DF*, multipliés chacun par ſon côté *AD*; c'eſt-à-dire (puiſque le premier *AD* eſt 1, le ſecond, 2, &c.), la ſomme triangulaire de tous les *AD* en *DF*, à commencer par *A*. Donc auſſi le double de la ſomme des *AD* quarré en *DF*, ſera la même choſe que la ſomme triangulaire de deux fois tous les *AD* en *DF*, c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des rectangles ou ſections formées dans le double onglet, par les plans perpendiculaires paſſant par *DF*; mais la ſomme triangulaire

gulaire de ces ſections du double onglet, à commencer du côté de *A C* eſt égale (par la méthode générale des centres de gravité) au double onglet multiplié par ſon bras *Y E* ſur *A C*; donc auſſi le double de la ſomme des *A D* quarré en *D F*, eſt égal au double onglet multiplié par *Y E*. Mais deux fois la ſomme des *A D* quarré en *D F*, ou quatre fois la ſomme pyramidale des ordonnées *D F*, eſt connue par l'hypotheſe.

Donc ce produit du double onglet, multiplié par *Y E* eſt auſſi connu; mais on connoît le contenu du double onglet : donc on connoîtra auſſi le bras *Y E*.

Pour le ſixieme : je dis que le bras *Y D*, ſur l'axe, ſera auſſi connu; & que le double onglet, multiplié par le bras *Y D*, eſt égal à la ſomme triangulaire des *E G* quarré, à commencer par *A*, ou, ce qui eſt la même choſe, à la ſomme triangulaire des *F D* quarré, à commencer toujours par *A* : ce qui ſera montré ainſi.

Si on entend que le double onglet ſoit coupé par des plans perpendiculaires à celui du triligne, paſſant par les ordonnées *E G*, ils y formeront pour ſections des triangles rectangles & iſoſceles, égaux chacun à *E G* quarré, comme il a été dit. Or par la méthode générale des centres de gravité, la ſomme triangulaire de ces ſections ou des quarrés *E G*, à

à commencer par *A*, eſt égale au double onglet multiplié par ſon bras *Y D*: mais la ſomme triangulaire des *E G* quarré eſt connue, puiſque la ſomme triangulaire des *D F* quarré eſt connue par l'hypotheſe : donc le produit du double onglet, multiplié par *Y D*, eſt connu : mais le contenu du double onglet eſt connu ; donc *Y D* eſt connu.

Pour le ſeptieme : je dis que le contenu du double onglet de l'axe ſera connu.

Car, puiſque la ſomme des *D F* quarré eſt connue par l'hypotheſe, le double onglet de l'axe l'eſt auſſi, puiſqu'il en eſt compoſé.

Pour le huitieme & neuvieme : ſoit maintenant *Y* le centre de gravité du double onglet de l'axe: je dis que ſes deux bras *Y E*, *Y D* ſur la baſe & ſur l'axe ſeront connus.

Car, puiſque tous les *A E* quarré en *E G*, ſont connus, étant égaux par la troiſieme au tiers de tous les *D F* cube, dont la ſomme eſt connue par l'hypotheſe; on en conclura que le bras *Y D* ſera connu : & de même, puiſque la ſomme triangulaire des *D F* quarré eſt connue par l'hypotheſe, on en conclura que le bras *Y E* ſera auſſi connu, de la même ſorte qu'on l'a conclu des deux bras du double onglet de la baſe dans les articles 5 & 6, par le moyen des données ſemblables à l'égard de ce double onglet de la baſe.

COROLLAIRES.

COROLLAIRES.

1. *L'espace du triligne est égal à la somme des ordonnées à la base, ou à la somme des ordonnées à l'axe.*

2. *Le triligne multiplié par son bras sur l'axe, est égal à la somme triangulaire des ordonnées à la base, en commençant par l'axe; ou à la moitié de la somme des quarrés des ordonnées à l'axe.*

Cela est démontré dans le second article.

3. *Le triligne multiplié par son bras sur la base, est égal à la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; ou à la moitié des quarrés des ordonnées à la base.*

C'est la même chose que le précédent.

4. *Le double onglet de la base est égal à la somme des quarrés des ordonnées à la base; ou au double de la somme des ordonnées à l'axe, multipliées chacune par sa distance de la base; ou à deux fois la somme triangulaire des ordonnées à l'axe, à commencer par la base.*

Cela est montré dans le quatrieme article.

5. *Le double onglet de la base, multiplié par son bras sur la base, est égal à deux fois la somme des*

ordonnées à l'axe, multipliées chacune par le quarré de sa distance de la base; ou à quatre fois la somme pyramidale des ordonnées à l'axe, à commencer par la base; ou au double de la somme triangulaire des rectangles compris de chaque ordonnée & de sa distance de l'axe, à commencer du côté de la base; ou aux deux tiers des cubes des ordonnées à la base.

Cela s'ensuit du cinquieme article.

6. *Le double onglet de la base, multiplié par son bras sur l'axe, est égal à la somme triangulaire des quarrés des ordonnées à la base, à commencer du côté de l'axe; ou à la somme triangulaire des quarrés des ordonnées à l'axe, à commencer du côté de la base; ou à la simple somme des quarrés des ordonnées à la base, multipliés chacun par sa distance de l'axe; ou à la simple somme des quarrés des ordonnées à l'axe, multipliés chacun par sa distance de la base.*

Cela s'ensuit du sixieme article.

Il faut entendre la même chose du double onglet de l'axe, sans autre différence que de mettre *axe* au lieu de *base*, & *base* au lieu d'*axe*.

On peut tirer de-là plusieurs autres Corollaires, comme, par exemple, les converses des choses démontrées dans tous ces articles; savoir, que si on connoît la dimension & le centre de gravité,

tant du triligne que de ſes onglets : on connoîtra auſſi, 1°. la ſomme des ordonnées à l'axe ; 2°. la ſomme des quarrés de ces ordonnées ; 3°. la ſomme des cubes de ces ordonnées ; 4°. la ſomme triangulaire de ces ordonnées ; 5°. la ſomme triangulaire des quarrés des ordonnées ; 6°. la ſomme pyramidale des ordonnées. Et on connoîtra la même choſe à l'égard des ordonnées à la baſe.

On peut encore en tirer d'autres conſéquences, mais un peu plus recherchées, & entre autres celle-ci, qui peut être d'un grand uſage.

CONSÉQUENCE.

Si un triligne eſt tourné, premiérement, ſur la baſe, & enſuite ſur l'axe, & qu'il forme ainſi deux ſolides, l'un autour de la baſe & l'autre autour de l'axe : je dis que la diſtance entre l'axe & le centre de gravité du ſolide autour de la baſe eſt à la diſtance entre la baſe & le centre de gravité du ſolide autour de l'axe, comme le bras du triligne ſur l'axe au bras du triligne ſur la baſe.

D'où il paroît que ſi on connoît le centre de gravité du triligne & d'un de ſes ſolides, celui de l'autre ſera auſſi connu.

Fig. 13. Soit un triligne rectangle BAC (*Fig.* 13.) dont le centre de gravité ſoit Y, & les bras ſur l'axe & ſur la baſe ſoient YX, YZ; ſoit auſſi M le centre de gravité du ſolide autour de l'axe, & ſoit N le centre

centre de gravité du ſolide autour de la baſe : je dis que *AM* eſt à *AN*, comme *AX* à *AZ*, ou comme *YZ* à *YX*: & qu'ainſi ſi *AX*, *AZ* & *AN* ſont connus, *AM* le ſera auſſi.

Car en coupant le ſolide ſur l'axe par des plans perpendiculaires paſſant par les ordonnées *DF*, ils donneront pour ſections des cercles, dont les ordonnées *DF* ſeront les rayons ; & en coupant enſuite le ſolide autour de la baſe par des plans perpendiculaires paſſant par les ordonnées *EG*, qui donneront auſſi pour ſections des cercles, dont les ordonnées *EG* ſeront les rayons, il arrivera que la ſomme triangulaire des cercles *DF*, à commencer par *A*, ſera égale au ſolide autour de l'axe, multiplié par ſon bras *AM* (par la méthode générale des centres de gravité) ; & par la même méthode, la ſomme triangulaire des cercles *EG*, à commencer par *A*, ſera auſſi égale au ſolide autour de la baſe, multiplié par ſon bras *AN*: mais la ſomme triangulaire des cercles *DF* eſt égale à la ſomme triangulaire des cercles *EG*, à commencer toujours par *A*, puiſque les ſommes triangulaires de leurs quarrés ſont égales entre elles : donc le ſolide autour de l'axe, multiplié par ſon bras *AM*, eſt égal au ſolide autour de la baſe, multiplié par ſon bras *AN*; donc *AM* eſt à *AN*, comme le ſolide autour de la baſe au ſolide autour de l'axe, c'eſt-à-dire, comme le bras *YZ* au bras *YX*.

Car on ſait aſſez que le ſolide autour de la baſe eſt au ſolide autour de l'axe, comme le bras *YX* du triligne ſur l'axe au bras *YZ* du triligne ſur la baſe; ce qui eſt encore une conſéquence qui ſe tire des propoſitions précédentes, & qui ſe démontrera ainſi.

Le ſolide autour de la baſe eſt au ſolide autour de l'axe, comme la ſomme des cercles *EG* à la ſomme des cercles *DF*; ou comme la ſomme des *EG* quarré à la ſomme des *DF* quarré, c'eſt-à-dire (par le Corollaire de la deuxieme), comme la ſomme triangulaire des ordonnées *DF* à la ſomme triangulaire des ordonnées *EG*, à commencer toujours par *A*, c'eſt-à-dire (par la méthode générale des centres de gravité), comme le triligne multiplié par ſon bras *AX* ou *YZ*, au triligne multiplié par ſon bras *AZ* ou *YX*, c'eſt-à-dire, comme *YZ* à *YX*. Ce qu'il falloit démontrer.

MÉTHODE pour trouver la dimenſion & le centre de gravité de la ſurface courbe des doubles onglets, par la ſeule connoiſſance des ſinus ſur l'axe.

SI on connoît dans un triligne :

1°. *La grandeur de ſa ligne courbe.*

2°. *La ſomme des ſinus ſur l'axe.*

3°. *La*

3°. *La ſomme des quarrés de ces ſinus ſur l'axe.*

4°. *La ſomme des rectangles de ces mêmes ſinus ſur l'axe multipliés chacun par leur diſtance de la baſe : je dis qu'on connoîtra auſſi la dimenſion de la ſurface courbe du double onglet de l'axe & le centre de gravité de cette ſurface courbe, c'eſt-à-dire, le bras de cette ſurface ſur la baſe, & le bras de cette même ſurface ſur l'axe.*

Car (*Fig.* 10.) ſi la courbe *AYC* eſt diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points *Y*, d'où ſoient menés les ſinus ſur l'axe, & que, comme il a été dit vers la fin de la Lettre, des plans ſoient entendus élevés perpendiculairement au plan du triligne, paſſant par chacun des ſinus *YZ* : les ſections qu'ils donneront dans la ſurface du double onglet ſeront des droites perpendiculaires au plan du triligne, qui ſeront doubles chacune de chaque ſinus *YZ*, comme il a été montré dans la Lettre. Fig. 10.

Or il eſt viſible que la ſomme de ces perpendiculaires formées dans cette double ſurface, compoſent la ſurface courbe, étant perpendiculaires à la courbe *AYC*. Donc ſi on connoît la ſomme de ces perpendiculaires, c'eſt-à-dire, le double de la ſomme des ſinus *ZY*, & qu'on connoiſſe auſſi la grandeur de la ligne courbe, on connoîtra auſſi la ſurface courbe. Ce qu'il falloit premiérement démontrer.

Je dis maintenant que *ſi on connoît la ſomme*

des rectangles F Z *en* Z Y, *compris de chaque ſinus & de ſa diſtance de la baſe, on connoîtra auſſi le bras* T F *ou* H K, *le point* H *étant pris pour le centre de gravité de la ſurface courbe du double onglet: & que la ſomme des ſinus* Z Y *étant multipliée par le bras* T F, *eſt égale à la ſomme de tous les rectangles* Y Z *en* Z F.

Car il eſt viſible que le même bras *T F*, qui meſure la diſtance d'entre le centre de gravité *H* de la ſurface courbe du double onglet, & la baſe *F A*, meſurera auſſi la diſtance qui eſt entre le centre de gravité commun de tous les ſinus *Z Y*, placés comme ils ſe trouvent, & la même baſe *A F*: d'autant que chaque ſinus *Z Y* eſt éloigné de la baſe *A F* de la même diſtance que chacune des perpendiculaires au plan du triligne, paſſant par les points *Y*, & que chaque ſinus eſt à chaque perpendiculaire toujours en même raiſon, ſavoir, comme 1 à 2.

Or il ſera montré incontinent que la ſomme des rectangles *Z Y* en *Z F*, compris de chaque *Y Z* & de ſa diſtance du point *F*, eſt égale à la ſomme des mêmes *Y Z*, multipliée par la diſtance d'entre la baſe & le centre de gravité commun de toutes les *Z Y* placées comme elles ſe trouvent; mais la ſomme des rectangles *Y Z* en *Z F* eſt donnée par l'hypotheſe. Donc la ſomme des ſinus, multipliée par la diſtance entre leur centre de gravité commun & la baſe, ſera auſſi donnée; mais la ſomme

des

des ſinus eſt auſſi donnée par l'hypotheſe. Donc la diſtance entre leur centre de gravité commun & la baſe ſera auſſi donnée : & par conſéquent auſſi la diſtance entre la baſe & le centre de gravité de la ſurface courbe du double onglet, puiſqu'elle eſt la même.

Maintenant on démontrera le Lemme qui a été ſuppoſé, en cette ſorte :

Soit (*Fig. 9.*) *FC* une balance horizontale diviſée comme on voudra en parties égales ou inégales, aux points *Z*, où pendent pour poids des droites perpendiculaires *Z Y* de telle longueur qu'on voudra. Soit enfin le centre de gravité commun de toutes au point *T*, auquel la balance ſoit ſuſpendue en équilibre : je dis que la ſomme des rectangles *Y Z* en *Z F*, compris de chaque perpendiculaire *Y Z* & de ſa diſtance de l'extrémité de la balance *F*, eſt égale à la ſomme des rectangles, compris du bras *T F* & de chacune des perpendiculaires *Z Y*. Fig. 9.

Car en prenant la droite *X* ſi petite que le rectangle compris de cette droite *X* & de la plus grande des droites *Z Y*, ſoit moindre qu'aucun eſpace donné, & diviſant cette droite *X* en parties égales qui ſoient en plus grand nombre que la multitude des droites *Z Y*; il eſt viſible que la ſomme des rectangles, compris de chaque *Z Y* & de chacune des petites portions de *X*, ſera moindre

qu'aucun eſpace donné, puiſque par la conſtruction, le rectangle compris de la plus grande des *Z Y* & de l'entiere *X*, eſt moindre qu'aucun eſpace donné.

Maintenant ſoit diviſée la balance entiere *F C* en parties égales, chacune à chacune des petites parties de *X*: donc les points *Z* ſe rencontreront aux points de ces diviſions, ou la différence n'altérera point l'égalité qui eſt propoſée, puiſque la ſomme de toutes les *Z Y*, multipliées chacune par une de ces petites parties de la balance, ſera moindre qu'aucun eſpace donné. Et par conſéquent *F C* ſera une balance diviſée en parties égales, & aux points de diviſion pendent des poids; ſavoir, aux uns les perpendiculaires *Z Y*, & aux autres pendent pour poids des zéro : & le centre de gravité commun de tous ces poids eſt au point *T*. Donc, par ce qui a été démontré dans la Lettre, la ſomme de tous les poids multipliés par le bras *F T* (c'eſt-à-dire, la ſomme des rectangles, compris des *F T* & de chacune des *Z Y*), eſt égale à la ſomme triangulaire de tous les poids, à commencer par *F*. Or en prenant cette ſomme triangulaire, il eſt viſible qu'on prendra la premiere *Z Y* ou *V Y* autant de fois qu'il y a de parties dans la diſtance *F V*, & qu'on prendra de même la ſeconde *Z Y* ou *H Y* autant de fois qu'il y a de parties dans la diſtance *F H*, & ainſi toujours. Donc la ſomme triangulaire

triangulaire de ces poids, à commencer par *F*, n'eſt autre choſe que la ſomme des produits des poids, multipliés chacun par ſon propre bras ſur *FY*, c'eſt-à-dire, la ſomme des rectangles *FZ* en *ZY*, qui ſeront partant égaux à la ſomme des rectangles, compris de chaque *ZY* & du bras commun *TF*.

AVERTISSEMENT.

De-là paroît la démonſtration de cette méthode aſſez connue, que *la ſomme des poids, multipliée par le bras commun de tous enſemble, eſt égale à la ſomme des produits de chaque poids, multiplié par ſon propre bras, à l'égard d'un même axe de balancement.*

Je ne m'arrête pas à l'expliquer davantage, parce que je ne m'en ſers point : ce n'eſt pas que je n'euſſe pu démontrer par cette méthode les propoſitions V, XIII, XIV, XV. Mais ma méthode m'ayant ſuffi par-tout, j'ai mieux aimé ne point en employer d'autre.

Je dis maintenant que *ſi on connoît* (Fig. 10.) *la ſomme des quarrés* ZY, *on connoîtra auſſi le bras* HT *ou* KF, *c'eſt-à-dire, la diſtance entre l'axe* CF *& le centre de gravité* H *de la ſurface courbe du double onglet : & que la ſomme des ſinus* ZY *étant multipliée par le bras* KF, *ſera égale à la ſomme des quarrés des mêmes ſinus* ZY. Fig. 10.

Car

Car en menant de tous les points *Y* les perpendiculaires *YQ* sur la base *AF*, & en les prolongeant de l'autre côté de la base jusqu'en *B*, en sorte que chaque *QB* soit égale à chaque *ZY*: il est visible que le même bras *HT* ou *KF*, qui mesure la distance d'entre l'axe & le centre de gravité *H* de la surface courbe du double onglet, mesurera aussi la distance qui est entre le même axe *CF* & le centre de gravité de toutes les perpendiculaires *QB*, placées comme elles se trouvent, par la même raison qu'en l'article précedent : savoir, que chaque *QB* est toujours en même distance de l'axe *CF*, que la perpendiculaire correspondante élevée dans la surface courbe sur le point *Y*, & qu'elles sont toujours en même raison entre elles.

Or, par le Lemme précédent, le centre de gravité commun des perpendiculaires *QB*, placées comme elles sont, est distant de l'axe *CF* de telle sorte, que la somme des rectangles *QB* en *QF*, compris de chaque *QB* & de sa distance du point *F*, est égale à la somme des mêmes *QB*, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun & l'axe. Mais la somme de ces rectangles *QB* en *QF*, ou des *ZY* quarré, ou des *QB* quarré (chaque *QB* étant faite égale à chaque *ZY*) est connue par l'hypothese. Donc on connoîtra aussi la somme des droites *QB*, multipliée par la distance d'entre leur centre de gravité commun & l'axe. Mais

la

la ſomme des QB ou des ZY eſt auſſi connue par l'hypotheſe. Donc on connoîtra auſſi la diſtance d'entre l'axe & le centre de gravité commun des droites QB, placées comme elles ſont, c'eſt-à-dire, la diſtance d'entre l'axe & le centre de gravité de la ſurface courbe du double onglet.

Avertissement.

Il faut entendre la même choſe du double onglet de la baſe, & cela ſe démontrera de même, en mettant ſimplement *baſe* au lieu d'*axe*, & *axe* au lieu de *baſe*; c'eſt-à-dire, que ſi on connoît la ſomme des ſinus ſur la baſe & la ſomme de leurs quarrés, & la ſomme des rectangles compris de chaque ſinus & de ſa diſtance de l'axe, on connoîtra auſſi la dimenſion & le centre de gravité de la ſurface courbe du double onglet de la baſe.

Or il eſt viſible que les ſinus ſur la baſe ne ſont autre choſe que les diſtances entre la même baſe & les ſinus ſur l'axe, & que les ſinus ſur l'axe ne ſont auſſi autre choſe que les diſtances d'entre l'axe & les ſinus ſur la baſe.

Donc ſi on connoît :

1°. La ſomme des ſinus ſur l'axe.

2°. La ſomme des quarrés de ces ſinus.

3°. La ſomme des diſtances entre ces ſinus & la baſe.

4°. La ſomme des quarrés de ces diſtances.

5°. La

5°. La ſomme des rectangles compris de chaque ſinus ſur l'axe & de ſa diſtance de la baſe.

Et qu'on connoiſſe outre cela la grandeur de la ligne courbe :

On connoîtra auſſi la dimenſion & le centre de gravité, tant de la ſurface courbe du double onglet de l'axe que de la ſurface courbe du double onglet de la baſe.

Et on connoîtra auſſi le centre de gravité de la ligne courbe.

Car la ligne courbe multipliée par ſon bras ſur la baſe, c'eſt-à-dire, par la diſtance entre ſon centre de gravité & la baſe, eſt égale à la ſomme des ſinus ſur la baſe : ce qui eſt viſible par ces deux propoſitions qui ſont démontrées dans les choſes précédentes; l'une, que la ſomme des ſinus ſur la baſe eſt égale à la ſomme triangulaire des portions de la ligne courbe, compriſes entre le ſommet & chacune des ordonnées à l'axe, à commencer par la baſe; l'autre, que cette ſomme triangulaire eſt égale à la ligne courbe entiere multipliée par ſon bras ſur la baſe.

Et la même choſe ſera véritable à l'égard de l'axe, en prenant l'*axe* pour *baſe* & la *baſe* pour *axe*.



PROPRIÉTÉS



PROPRIÉTÉS
DES SOMMES SIMPLES,
TRIANGULAIRES ET PYRAMIDALES.

AVERTISSEMENT.

ON ſuppoſe ici que ces trois Lemmes ſoient connus :

I. Si une droite quelconque *A F* eſt diviſée comme on voudra au point *H*: *A H F*
je dis que *A F* quarré eſt égal à deux fois le rectangle *F A* en *A H*, moins *A H* quarré, plus *H F* quarré.

II. Je dis auſſi que *A F* cube eſt égal à *A H* cube, plus *H F* cube, plus 3 *A H* quarré en *H F*, plus 3 *H F* quarré en *H A*.

III. Je dis que 3 *A F* en *H A* quarré, plus 3 *A F* en *H F* quarré, moins *A F* cube, moins 2 *F H* cube, ſont égaux à 2 *A H* cube.

PREMIERE PROPRIÉTÉ.

Soit une multitude indéfinie de grandeurs telles qu'on voudra A, B, C, D, *deſquelles on connoiſſe la ſomme ſimple, la ſomme triangulaire & la ſomme pyramidale, à commencer par* A : *je dis qu'on connoîtra auſſi leur ſomme triangulaire & pyramidale, à commencer par* D.

Car

Fig. 17. Car ſoit priſe (*Fig.* 17.) la ligne droite *A F* de telle grandeur qu'on voudra, laquelle ſoit diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points *H*, & que de tous les points de diviſion on éleve des perpendiculaires *H D*, qui ſoient entre elles comme les grandeurs propoſées, c'eſt-à-dire, que la premiere *H D* (qui eſt la plus proche du point *A*) ſoit à la ſeconde *H D*, comme *A* eſt à *B*, &c.

Maintenant puiſqu'on connoît tant la droite *A F*, par la conſtruction, que la ſomme des droites *H D*, par l'hypotheſe, on connoîtra la ſomme de tous les rectangles compris de *A F* & de chacune des *H D*; mais la ſomme des rectangles *A H* en *H D* eſt donnée, puiſque la premiere *A H* étant 1, la ſeconde *A H*, 2, &c., la ſomme des rectangles *A H* en *H D* n'eſt autre choſe que la ſomme triangulaire de toutes les *H D*, à commencer par *A*, laquelle eſt donnée par l'hypotheſe. Donc la ſomme des rectangles reſtant *F H* en *H D* ſera donnée, c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des *H D*, à commencer par *F*, & par conſéquent auſſi la ſomme triangulaire des grandeurs propoſées *A*, *B*, *C*, *D*, à commencer par *D*.

De même puiſque *A F* quarré eſt donné, & auſſi la ſomme de tous les *H D*, il s'enſuit que la ſomme de tous les *A F* quarré en *H D* eſt donnée; c'eſt-à-dire, la ſomme des ſolides compris de chaque *H D* & de *A F* quarré. Mais, par les Lemmes ſuppoſés dans l'avertiſſement, *A F* quarré eſt égal à

à deux fois *F A* en *A H*, moins *A H* quarré, plus *H F* quarré; & cela eſt toujours vrai, quelque point que l'on conſidere d'entre les points *H* : donc tous les *D H* en *A F* quarré ſont égaux à deux fois tous les *D H* en *H A* en *A F*, moins tous les *D H* en *H A* quarré, plus tous les *D H* en *H F* quarré : mais tous les *H D* en *A H* en *A F* ſont donnés (puiſque *A F* eſt donnée, & auſſi tous les *A H* en *H D*, comme on vient de voir), & tous les *D H* en *A H* quarré ſont auſſi donnés, puiſque c'eſt la même choſe que la ſomme pyramidale des *H D*, à commencer par *A*, laquelle eſt donnée par l'hypotheſe. Donc auſſi tous les reſtants, ſavoir, tous les *D H* en *H F* quarré, ſeront par conſéquent donnés, c'eſt-à-dire, la ſomme pyramidale des *H D*, à commencer par *F*; & partant auſſi la ſomme pyramidale des grandeurs propoſées, à commencer par la derniere *D*. Ce qu'il falloit démontrer.

II Propriété.

Les mêmes choſes étant poſées : ſi on ajoute à chacune des grandeurs propoſées A, B, C, D, *une même grandeur commune* E, *laquelle ſoit auſſi connue; en ſorte que chacune des grandeurs* A, B, C, D, *avec l'ajoutée* E, *ne ſoit plus conſidérée que comme une même : & qu'ainſi il y ait maintenant autant de grandeurs nouvelles qu'auparavant; ſavoir,* A *plus* E, B *plus* E, C *plus* E, D *plus* E, *&c.: je*

je dis que la ſomme triangulaire & la ſomme pyramidale de ces grandeurs ainſi augmentées, ſera auſſi connue, de quelque côté que l'on commence.

Car en prenant la figure *AHFD* comme auparavant, & prolongeant chacune des perpendiculaires *DH* juſques en *O*, en ſorte que l'ajoutée commune *HO* ſoit à chacune des *HD*, comme la grandeur ajoutée *E*, eſt à chacune des autres *A*, *B*, *C*, *D*: il eſt viſible que puiſque *HO* eſt donnée, & auſſi la ſomme de toutes les *AH* (car elles ſont égales à la moitié de *AF* quarré), la ſomme des rectangles *AH* en *HO* ſera donnée; mais la ſomme des rectangles *AH* en *HD* eſt auſſi donnée; donc la ſomme des rectangles *AH* en *DO* eſt auſſi donnée, c'eſt-à-dire, la ſomme de tous les rectangles *RO* en *OD*, c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des *OD*; & partant auſſi la ſomme triangulaire des grandeurs augmentées *A* plus *E*, *B* plus *E*, *C* plus *E*, *D* plus *E*. Ce qu'il falloit premiérement démontrer.

On montrera de même que la ſomme pyramidale des *OD* eſt donnée; ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des *RO* quarré en *OD*: car la ſomme des *RO* quarré eſt donnée; ſavoir, le tiers de *RS* cube ou *AF* cube; mais *HO* eſt donnée; donc tous les *RO* quarré en *OH* ſont donnés; mais tous les *RO* quarré, ou *AH* quarré en *HD* ſont auſſi donnés, comme il a été dit;

donc

donc tous les *RO* quarré en *OD* ſont donnés; donc, &c.

III Propriété.

Les mêmes choſes étant poſées : ſi les grandeurs propoſées A, B, C, D *ſont des lignes droites ou courbes, deſquelles les ſommes ſimples, triangulaires & pyramidales ſoient données comme il a déja été ſuppoſé, & outre cela la ſomme ſimple de leurs quarrés, la ſomme triangulaire de leurs quarrés & la ſomme ſimple de leurs cubes : je dis que la ligne commune* E *leur étant ajoutée, comme il a été ſuppoſé, & qu'ainſi chacune d'elles avec leur ajoutée ne ſoit plus conſidérée que comme une ſeule ligne, la ſomme des quarrés de ces lignes augmentées ſera donnée, & auſſi la ſomme triangulaire de leurs quarrés & la ſimple ſomme de leurs cubes.*

Car ſoit comme auparavant les perpendiculaires *HD* égalées aux lignes propoſées *A, B, C, D*, chacune à la ſienne, & la droite *HO* à la ligne ajoutée *E :* donc, par l'hypotheſe, la ſimple ſomme des *HD* ſera donnée, & la ſomme de leurs quarrés, & la ſomme de leurs cubes, & auſſi la ſomme triangulaire des droites *HD*, ou la ſomme des *AH* en *HD*, & la ſomme triangulaire de leurs quarrés, ou la ſomme des *AH* en *HD* quarré, & la ſomme pyramidale des *HD* ou des *AH* quarré en *HD*.

Il faut maintenant démontrer que la ſomme des

O D quarré eſt donnée, & auſſi la ſomme des *OD* cube, & enfin la ſomme triangulaire des *O D* quarré, ou la ſomme des *R O* en *O D* quarré. Ce qui ſera aiſé en cette ſorte.

Chaque *O D* quarré étant égal à deux fois *O H* en *H D*, plus *O H* quarré, plus *H D* quarré, il s'enſuit que la ſomme des *O D* quarré ſera donnée, ſi la ſomme des *O H* en *H D* deux fois eſt donnée, & la ſomme des *O H* quarré, & la ſomme des *H D* quarré. Or puiſque *O H* eſt donné, & auſſi la ſomme des *H D*, la ſomme des rectangles *O H* en *H D* eſt donnée; & partant auſſi deux fois la ſomme de ces mêmes rectangles *O H* en *H D*; mais la ſomme des *O H* quarré eſt donnée, & auſſi la ſomme des *H D* quarré, par l'hypotheſe. Donc la ſomme des *O D* quarré eſt donnée. Ce qui eſt le premier article.

Maintenant chaque *O D* cube étant égal à trois fois *O H* quarré en *H D*, plus trois fois *O H* en *H D* quarré, plus *O H* cube, plus *H D* cube, il s'enſuit que la ſomme des *O D* cube ſera donnée, ſi trois fois la ſomme des *O H* quarré en *H D* eſt donnée, plus trois fois la ſomme des *H O* en *H D* quarré, plus la ſomme des *H O* cube, plus la ſomme des *H D* cube. Or puiſque *H O* quarré eſt donné, & auſſi la ſomme des *H D*, la ſomme des *H O* quarré en *H D* ſera auſſi donnée; & partant auſſi le triple de cette ſomme. De même puiſque *H O* eſt donné, & auſſi la ſomme des *H D* quarré, la ſomme des *O H*

OH en *HD* quarré sera aussi donnée, & partant aussi le triple de cette somme. Mais tous les *OH* cube sont encore donnés, & tous les *HD* cube sont aussi donnés par l'hypothese. Donc la somme des *OD* cube sera donnée. Ce qui est le second article.

Enfin pour montrer que la somme des *RO* en *OD* quarré est donnée, il faut montrer que la somme des *RO* en *OH* quarré est donnée, plus la somme des *RO* en *HD* quarré, plus le double de la somme des *RO* en *OH* en *HD*. Or la somme des *RO* ou *AH* en *HD* quarré est donnée par l'hypothese: & puisque *HO* quarré est donné, & aussi la somme de tous les *RO*, il s'ensuit que la somme de tous les *RO* en *OH* quarré est donnée; & de même puisque *HO* est donné, & aussi tous les *AH* en *HD* par l'hypothese, tous les *AH* en *HD* en *HO* le seront aussi, ou tous les *RO* en *OH* en *HD*; & partant aussi le double de cette somme. Donc tous les *RO* en *OD* quarré sont aussi donnés. Ce qui est le dernier article.

IV Propriété.

Les mêmes choses étant posées: si on applique à chacune des lignes proposées une ligne quelconque, comme DN, *qui sera appellée sa* coéfficiente, *& que chaque coéfficiente* DN *ait telle raison qu'on voudra avec sa ligne* DH; *soit que ces raisons soient par-*

tout les mêmes, ou qu'elles ſoient différentes, & qu'on connoiſſe la ſimple ſomme des coéfficientes D N, *& la ſimple ſomme de leurs quarrés, & la ſomme triangulaire des droites* D N, *ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des* R O *en* D N :

Je dis, 1°. que ſi la ſomme des H D *en* D N *eſt donnée, c'eſt-à-dire, la ſomme des rectangles compris de chaque ligne & de ſa coéfficiente; auſſi la ſomme des* O D *en* D N *ſera donnée, c'eſt-à-dire, la ſomme des rectangles compris de chaque augmentée & de ſa coéfficiente.*

Car tous les *O D* en *D N* ſont égaux à tous les *H D* en *D N* (qui ſont donnés par l'hypotheſe) plus tous les *O H* en *D N*, qui ſont donnés, puiſque *O H* eſt donné, & auſſi la ſomme des *D N* par l'hypotheſe.

Je dis, 2°. que ſi la ſomme des H D *en* D N *quarré eſt donnée, la ſomme des* O D *en* D N *quarré ſera auſſi donnée.*

Car la ſomme des *O H* en *D N* quarré eſt auſſi donnée, puiſque *O H* eſt donné, & auſſi la ſomme des *D N* quarré, par l'hypotheſe.

Je dis, 3°. que ſi la ſomme des H D *quarré en* D N *eſt donnée, & auſſi la ſomme des* H D *en* D N, *la ſomme des* O D *quarré en* D N *ſera auſſi donnée.*

Car la ſomme des *H D* quarré en *D N* eſt donnée par l'hypotheſe, & la ſomme des *H O* quarré en *D N* eſt auſſi donnée (puiſque *H O* quarré eſt

eſt donné, & auſſi la ſomme des *DN*), & la ſomme des *OH* en *HD* en *DN* eſt auſſi donnée, puiſque *OH* eſt donné, & auſſi la ſomme des *HD* en *DN* par l'hypotheſe; & partant auſſi le double de cette ſomme.

Je dis, 4°. que ſi la ſomme triangulaire des rectangles HD *en* DN *eſt donnée, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi la ſomme des* AH *en* HD *en* DN *eſt donnée, ou des* RO *en* HD *en* DN, *la ſomme triangulaire des* OD *en* DN *ſera auſſi donnée; ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des* RO *en* OD *en* DN.

Car la ſomme des *RO* en *OH* en *DN* eſt auſſi donnée, puiſque *OH* eſt donné, & auſſi la ſomme des *RO* en *DN* par l'hypotheſe.

Avertissement.

Si au lieu d'ajouter la grandeur commune *E*, ou *HO* à chacune des grandeurs propoſées *HD*, comme on a fait ici, pour en former les toutes *OD*, on ôte, au contraire, de chacune des grandeurs *HD* la grandeur commune *HI*, on conclura des reſtes *DI*, tout ce qui a été conclu des entieres *OD*. Et ſi on prend, au contraire, une grandeur quelconque *HG*, de laquelle on ôte chacune des grandeurs propoſées *HD*, on conclura encore des reſtes *GD* les mêmes choſes: & de même ſi on prend *AX* (égale à la plus grande des grandeurs

 deurs

deurs propoſées) pour la grandeur commune, de laquelle on ôte chacune des autres *H D*, on conclura toujours la même choſe des reſtes *D X*. Car il n'y a de différence en tous ces cas, que dans les ſignes de *plus* & de *moins*; & la démonſtration en ſera ſemblable & n'aura nulle difficulté, principalement après les Lemmes marqués dans l'Avertiſſement devant la premiere de ces Propriétés.

D'où il paroît que s'il y a une ligne quelconque droite ou courbe, donnée de grandeur *R S*, coupée comme on voudra aux points *T*, en parties égales ou inégales, & qu'elle ſoit prolongée du côté de *S* juſqu'en *P*, & du côté de *R* juſqu'en *Q*, & que les lignes ajoutées *S P*, *Q R* ſoient données de grandeur : ſi on connoît toutes ces choſes, ſavoir, la ſomme de leurs quarrés, la ſomme de leurs cubes, la ſomme triangulaire des mêmes lignes *T P*, la ſomme pyramidale des mêmes lignes, & la ſomme triangulaire de leurs quarrés, à commencer toujours du côté de *R* : il arrivera auſſi que les mêmes choſes ſeront données à l'égard des lignes *T Q*, c'eſt-à-dire, la ſomme des lignes *T Q*, la ſomme de leurs quarrés, la ſomme de leurs cubes, la ſomme triangulaire des mêmes lignes *T Q*, leur ſomme pyramidale, & la ſomme triangulaire de leurs quarrés, à commencer maintenant du côté de *S*.

Car en prenant les droites *HD* de la grandeur des droites *PT*; c'eſt-à-dire, que la premiere *PT* ou

ou *PR*, ſoit égale à la premiere *HD*, c'eſt-à-dire, à la plus proche du point *A*, & que la ſeconde *PT* ſoit égale à la ſeconde *HD*, &c., & prenant *HG* égale à *PQ*: il eſt viſible que (puiſque toutes les ſommes ſuppoſées ſont données à l'égard des droites *TP*, à commencer par la grande *RP*) les mêmes ſommes ſeront données dans les droites *HD* qui leur ſont égales, à commencer du côté de la grande *HD*, ou du côté du point *A*; & par conſéquent les mêmes ſommes ſeront données à l'égard des mêmes *HD*, à commencer du côté de *F* (par la premiere de ces propriétés): & partant les mêmes ſommes ſeront données à l'égard des reſtes *GD*, à commencer du côté *E*; c'eſt-à-dire, que les mêmes choſes ſeront données à l'égard des droites *TQ*, à commencer du côté de *S*; puiſque chaque *TQ* eſt égal à chaque *DG*, des choſes égales étant ôtées de choſes égales.

Il faut entendre la même choſe dans les portions des figures planes, comme on va voir dans cet exemple.

Soit une figure plane quelconque (*Fig.* 18.) *LZZV* donnée de grandeur, & diviſée comme on voudra par les droites *YZ*, & qu'on y ajoute d'une part la figure *MLZ*, & de l'autre la figure *KVZ*, qui ſoient auſſi toutes deux données de grandeur: je dis que ſi on connoît la ſomme des Fig. 18.

eſpaces *MYZ*, & auſſi leur ſomme triangulaire, à commencer du côté de *VZ*; on connoîtra auſſi la ſomme des eſpaces *KYZ*, & leur ſomme triangulaire.

Et on le montrera de la même ſorte, en prenant de même les droites *HD* qui repréſentent les eſpaces *MYZ*; c'eſt-à-dire, que la premiere *HD* repréſente le plus grand *MYZ* ou *MVK*, & la ſeconde, le ſecond, &c. : & que la droite *HG* repréſente l'eſpace entier *MVZ*; c'eſt-à-dire, que ces droites ſoient entre elles en même raiſon que ces eſpaces.

De toutes les propriétés qui ſont ici données, ſe tirent pluſieurs conſéquences, & entre autres celles-ci.

Que s'il y a un triligne quelconque *FDXA*
Fig. 17. (*Fig.* 17.) dont on connoiſſe l'eſpace, le ſolide autour de l'axe *FA*, & le centre de gravité de ce demi-ſolide, lequel centre de gravité ſoit *Y*: je dis que quelque droite qu'on prenne dans le même plan, parallele à *FA*, & qui ne coupe point le triligne, comme *RS*, laquelle ſoit éloignée de *FA* d'une diſtance donnée; & qu'on entende que le plan tout entier ſoit tourné autour de cette droite *RS*: on connoîtra auſſi le ſolide formé par le triligne dans ce mouvement; & auſſi le ſolide formé dans le même mouvement par le triligne *FDXY*
(qui

(qui eſt le reſte du rectangle circonſcrit *FAXX*) & auſſi les centres de gravité de ces ſolides & de leurs demi-ſolides.

Cela ſe conclut des propriétés précédentes; car on a ici les grandeurs *HD*, deſquelles on connoît la ſomme ſimple & la ſomme de leurs quarrés (puiſque l'eſpace *AFDX* & ſon ſolide autour de *AF* ſont donnés); donc en leur ajoutant, pour grandeur commune, la diſtance *HO* (qui eſt auſſi donnée par l'hypotheſe), il s'enſuit de ce qui a été montré dans ces propriétés, que la ſomme des *OD* quarré ſera donnée; & partant auſſi le ſolide formé par la figure entiere *SFDXAR*, tournée autour de *RS*, ſera donné. Mais le cylindre formé par le rectangle *SFAR* ſera auſſi donné; donc le ſolide annulaire reſtant, formé par le triligne *FDXA* autour de *RS*, ſera auſſi donné.

On montrera de même que le ſolide annulaire formé par le triligne *FDXX*, ſera auſſi donné, puiſque le cylindre de *SXXR* eſt donné.

Et pour leur centre de gravité, cela ſe montrera ainſi.

Puiſque le centre de gravité du demi-ſolide, formé par le triligne *FXA* autour de *FA*, eſt donné, ou (ce qui eſt la même choſe, en ſuppoſant la quadrature du cercle) le centre de gravité du double onglet de l'axe; il s'enſuit que la ſomme des *HD* cube eſt donnée, & auſſi la ſomme triangulaire

gulaire des *H D* quarré; donc puiſque la grandeur commune *HO* eſt auſſi donnée, la ſomme des *O D* cube ſera auſſi donnée, & auſſi la ſomme triangulaire des *O D* quarré; donc le centre de gravité du demi-ſolide de la figure entiere *S F D X A R*, tournant autour de *S R* d'un demi-tour, ſera auſſi donné. Mais le centre de gravité du demi-cylindre de *S F A R* eſt auſſi donné (en ſuppoſant toujours la quadrature du cercle quand il le faut); donc le centre de gravité du demi-ſolide annulaire reſtant, formé par le triligne *F X A* autour de la même *S R*, ſera auſſi donné; la raiſon du cylindre au ſolide annulaire étant donnée.

On le montrera de même du ſolide annulaire *F D X X*. Et on montrera auſſi la même choſe en faiſant tourner tout le plan autour de *X X* ou de *B E*, &c.



TRAITÉ



TRAITÉ DES SINUS

DU QUART DE CERCLE.

LEMME (*Fig.* 29).

Fig. 29.

SOIT ABC *un quart de cercle, dont le rayon* AB *soit considéré comme axe, & le rayon perpendiculaire* AC *comme base; soit* D *un point quelconque dans l'arc, duquel soit mené le sinus* DI *sur le rayon* AC; *& la touchante* DE, *dans laquelle soient pris les points* E *où l'on voudra, d'où soient menées les perpendiculaires* ER *sur le rayon* AC: *je dis que le rectangle compris du sinus* DI *& de la touchante* EE, *est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les paralleles) & du rayon* AB.

Car le rayon *AD* est au sinus *DI*, comme *EE* à *RR* ou à *EK*: ce qui paroît clairement à cause des triangles rectangles & semblables *DIA*, *EKE*, l'angle *EEK* ou *EDI* étant égal à l'angle *DAI*.

PROPOSITION PREMIERE.

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle, est égale à la portion de la base, comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.

PROPOSITION

PROPOSITION II.

La somme des quarrés de ces sinus est égale à la somme des ordonnées au quart de cercle, qui seroient comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

PROPOSITION III.

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des quarrés des mêmes ordonnées, comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

PROPOSITION IV.

La somme des quarré-quarrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées, comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le même rayon.

Et ainsi à l'infini.

Fig. 34. *PRÉPARATION A LA DÉMONSTRATION* (F. 34).

Soit un arc quelconque *B P*, divisé en un nombre indéfini de parties aux points *D*, d'où soient menés les sinus *P O*, *D I*, &c. : soit prise dans l'autre quart de cercle la droite *A Q*, égale à *A O* (qui mesure la distance entre les sinus extrêmes de l'arc *B A P O*) : soit *A Q*, divisée en un nombre indéfini de parties égales aux points *H*, d'où soient menées les ordonnées *H L*.

DÉMONSTRATION

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION I.

Je dis que la ſomme des ſinus *D I* (multipliés chacun par un des arcs égaux *D D*, comme cela s'entend de ſoi-même) eſt égale à la droite *A O* multipliée par le rayon *A B*.

Car en menant de tous les points *D* les touchantes *D E*, dont chacune coupe ſa voiſine aux points *E*, & remenant les perpendiculaires *E R*; il eſt viſible que chaque ſinus *D I* multiplié par la touchante *E E*, eſt égal à chaque diſtance *R R* multipliée par le rayon *A B*. Donc tous les rectangles enſemble des ſinus *D I*, multipliés chacun par ſa touchante *E E* (leſquelles ſont toutes égales entre elles) ſont égaux à tous les rectangles enſemble, faits de toutes les portions *R R* avec le rayon *A B*; c'eſt-à-dire (puiſqu'une des touchantes *E E* multiplie chacun des ſinus, & que le rayon *A B* multiplie chacune des diſtances) que la ſomme des ſinus *D I*, multipliés chacun par une des touchantes *E E*, eſt égale à la ſomme des diſtances *R R* ou à *A O*, multipliée par *A B*: mais chaque touchante *E E* eſt égale à chacun des arcs égaux *D D*. Donc la ſomme des ſinus multipliés par un des petits arcs égaux, eſt égale à la diſtance *A O* multipliée par le rayon.

AVERTISSEMENT.

Quand j'ai dit que toutes les diſtances enſemble

ble *RR*, ſont égales à *AO*, & de même que chaque touchante *EE* eſt égale à chacun des petits arcs *DD*, on n'a pas dû en être ſurpris, puiſqu'on ſait aſſez qu'encore que cette égalité ne ſoit pas véritable quand la multitude des ſinus eſt finie; néanmoins l'égalité eſt véritable quand la multitude eſt indéfinie, parce qu'alors la ſomme de toutes les touchantes, égales entre elles *EE*, ne differe de l'arc entier *BP*, ou de la ſomme de tous les arcs égaux *DD*, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée : non plus que la ſomme des *RR* de l'entiere *AO*.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.

Je dis que la ſomme des *DI* quarré (multipliés chacun par un des petits arcs égaux *DD*) eſt égale à la ſomme des *HL* ou à l'eſpace *BHQL* multiplié par le rayon *AB*.

Car, en prolongeant, tant les ſinus *DI*, que les ordonnées *HL* de l'autre côté de la baſe, juſques à la circonférence de l'autre part de la baſe qui les coupe aux points *G* & *N*; il eſt viſible que chaque *DI* ſera égal à chaque *IG*, & *HN* à *HL*.

Maintenant pour montrer ce qui eſt propoſé, que tous les *DI* quarré en *DD*, ſont égaux à tous les *HL* en *AB* : il ſuffit de montrer que la ſomme de tous les *HL* en *AB*, ou tous les *HN* en

en *A B*, ou l'eſpace *Q N N* multiplié par *A B*, eſt égal à tous les *G I* en *I D* en *E E*, ou à tous les *G I* en *R R* en *A B* (puiſque *I D* en *E E* eſt égal à chaque *R R* en *A B*). Donc en ôtant la grandeur commune *A B*, il faudra montrer que l'eſpace *A Q N N* eſt égale à la ſomme des rectangles *G I* en *R R* : ce qui eſt viſible, puiſque la ſomme des rectangles compris de chaque *G I* & de chaque *R R*, ne differe que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée de l'eſpace *A O G N*, qui eſt égal à l'eſpace *A Q N N*, puiſque la droite *A Q* eſt priſe égale à la droite *A O*. Ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III.

Je dis que la ſomme des *D I* cube eſt égale à la ſomme des *H L* quarré, multipliée par le rayon *A B*.

Car ſoit décrite la ligne *C G N N M* de telle nature, que quelque perpendiculaire qu'on mene à la baſe, comme *D I G* ou *L H N*, il arrive toujours que chaque *D I* quarré ſoit égal à *I G* en *A B*, & la démonſtration ſera pareille à la précédente, en cette ſorte.

Il eſt propoſé de montrer que la ſomme des *H L* quarré en *A B*, ou des *H N* en *A B* quarré, ou de l'eſpace *A Q N N*, multiplié par *A B* quarré, eſt égal à la ſomme des *D I* cube, multipliés par chaque

chaque arc DD, ou à la ſomme des DI quarré en DI en EE, ou des GI en AB en RR en AB, ou des AB quarré en GI en RR : donc en ôtant de part & d'autre le multiplicateur commun AB quarré, il faudra montrer que l'eſpace $AQNN$ eſt égal à la ſomme des rectangles GI en RR ; ce qui eſt viſible par la même raiſon qu'en la précédente.

Démonstration de la Proposition IV.

Je dis que la ſomme des DI quarré-quarré eſt égale à la ſomme des HL cube, multipliés par AB.

Car en décrivant une figure $CGNM$, dont la nature ſoit telle que quelque perpendiculaire qu'on y mene, comme DIG, il arrive toujours que DI cube ſoit égal à IG en AB quarré ; la démonſtration ſera ſemblable à la précédente, parce que cette figure ſera toujours coupée en deux portions égales & ſemblables par l'axe ABN, de même que le demi-cercle CBM. Et ainſi à l'infini.

Corollaire.

De la premiere propoſition, il s'enſuit que la ſomme des ſinus verſes d'un arc eſt égale à l'excès dont l'arc ſurpaſſe la diſtance d'entre les ſinus extrêmes, multiplié par le rayon.

Fig. 19. Je dis (*Fig.* 19.) que la ſomme des ſinus verſes DX eſt égale à l'excès, dont l'arc BP ſurpaſſe la droite AO, multiplié par AB.

Car

Car les ſinus verſes ne ſont autre choſe que l'excès, dont le rayon ſurpaſſe les ſinus droits : donc la ſomme des ſinus verſes *D X* eſt la même choſe que le rayon *A B*, pris autant de fois, c'eſt-à-dire, multiplié par tous les petits arcs égaux *D D*, c'eſt-à-dire, multiplié par l'axe entier *B P*, moins la ſomme des ſinus droits *D I*, ou le rectangle *B A* en *A O*. Et par conſéquent la ſomme des ſinus verſes *D X* eſt égale au rectangle compris du rayon *A B*, & de la différence entre l'arc *B P* & la droite *A O*.

PROPOSITION V.

Le centre de gravité de tous les ſinus d'un arc quelconque, placés comme ils ſe trouvent, eſt dans celui qui diviſe en deux également la diſtance d'entre les extrêmes.

Soit (*Fig.* 19.) un arc quelconque *B P*, & ſoit *A O* la diſtance entre les ſinus extrêmes, coupée en deux également en *Y* : je dis que le point *Y* ſera le centre de gravité de tous les ſinus *D I* de l'arc *B P*. Fig. 19.

Car ſi on entend que *A O* ſoit diviſée en un nombre indéfini de parties égales, d'où ſoient menées des ordonnées, & que l'on conſidere chaque ſomme des ſinus qui ſe trouve entre deux quelconques des ordonnées voiſines ; il eſt viſible que toutes ces petites ſommes particulieres de ſinus ſeront tou-

tes égales entre elles, puisque les distances d'entre les ordonnées voisines sont prises toutes égales entre elles, & que chaque somme de sinus est égale au rectangle fait de chacune de ces distances égales, multipliée par le rayon. Donc la droite *AO* est divisée en un nombre indéfini de parties égales, & ces parties égales entre elles sont toutes chargées de poids égaux entre eux (qui sont les petites sommes de ces sinus, comprises entre les ordonnées voisines).

Donc le centre de gravité de tous ces poids, c'est-à-dire, de tous les sinus placés comme ils sont, se trouvera au point du milieu *Y*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

La somme des rectangles, compris de chaque sinus sur la base & de la distance de l'axe, ou du sinus sur l'axe, est égale à la moitié du quarré de la distance d'entre les sinus extrêmes sur la base, multiplié par le rayon, lorsque l'arc est terminé au sommet.

Soit l'arc *BP*, terminé au sommet *B*, & soient *DS* les sinus sur l'axe : je dis que la somme des rectangles *DI* en *IA*, ou *DI* en *DS*, est égale à la moitié du quarré de *AO* multiplié par *AB*.

Car il a été démontré à la fin du Traité des Trilignes, que la somme des rectangles *AI* en

ID,

I D, eſt égale à la ſomme des ſinus *I D* multipliée par *A Y* (qui eſt la diſtance entre le dernier *A B* & leur centre de gravité commun *Y*) ; mais la ſomme des ſinus eſt égale à *A B* en *A O* : donc la ſomme des rectangles *A I* en *I D*, eſt égale à *A B* en *A O* en *A Y*, c'eſt-à-dire, à la moitié du quarré de *A O*, multiplié par *A B*.

PROPOSITION VII.

La ſomme triangulaire des ſinus ſur la baſe d'un arc quelconque, terminé au ſommet, à commencer par le moindre des ſinus extrêmes, eſt égale à la ſomme des ſinus du même arc ſur l'axe, multipliée par le rayon, ou, ce qui eſt la même choſe, à la différence d'entre les ſinus extrêmes ſur la baſe, multipliée par le quarré du rayon.

Je dis que la ſomme triangulaire des ſinus DI, *à commencer du côté de* DO, *eſt égale à la ſomme des ſinus* DS, *multipliée par le rayon, ou à* BV (*qui eſt la différence entre* BA & DO) *multipliée par* BA *quarré, ce qui n'eſt viſiblement que la même choſe, puiſque la ſomme des ſinus* DS *eſt égale au rectangle* VB *en* BA, *par la première de ce Traité.*

Car la ſomme triangulaire des ſinus *D I*, à commencer par *D O*, n'eſt autre choſe, par la définition, que la ſimple ſomme de tous les *D I* compris entre les extrêmes *B A*, *D O* : plus la ſomme de tous les *D I*, excepté le premier *D O*,

 c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, compris entre le ſecond *QT* & *AB*, & ainſi de ſuite : mais la ſomme des ſinus compris entre *DO* & *BA*, eſt égale à *OA* ou *PV* en *AB*; & la ſomme des ſinus compris entre *DT* & *AB*, eſt de même égale au rectangle *TA* ou *QS* en *AB*, & ainſi toujours. Donc la ſomme triangulaire des ſinus *DI*, à commencer par *DO*, eſt égale à la ſomme des ſinus *PV*, *QS*, *DS*, &c., multipliée par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

La ſomme pyramidale des ſinus d'un arc quelconque, terminé au ſommet, à commencer par le moindre, eſt égale à la ſomme des ſinus verſes du même arc multipliée par le quarré du rayon, ou, ce qui eſt la même choſe, à l'excès, dont l'arc ſurpaſſe la diſtance entre les ſinus extrêmes, multiplié par le cube du rayon.

Je dis que la ſomme pyramidale des ſinus DI, *à commencer par* DO, *eſt égale à la ſomme des ſinus verſés* DX, *multipliée par* BA *quarré, ou, ce qui eſt la même choſe, par le Corollaire, à l'arc* BP, *moins la droite* AO, *en* AB *cube.*

Car cette ſomme pyramidale n'eſt autre choſe que la ſomme triangulaire des ſinus *DI* compris entre *PO* & *AB*, plus la ſomme triangulaire de tous les ſinus compris entre *DT* & *AB*, & ainſi de ſuite : mais la premiere de ces ſommes triangulaires

triangulaires eſt égale par la précédente, à *BV* ou *PX* en *AB* quarré; & la ſeconde de ces ſommes triangulaires eſt égale, par la même raiſon, à *BZ* ou *QX* en *AB* quarré. Donc toutes les ſommes triangulaires enſemble, c'eſt-à-dire, la ſomme pyramidale des ſinus *DI*, à commencer par *DO*, eſt égale à la ſomme des ſinus verſes *DX* multipliée par *BA* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

La ſomme des eſpaces, compris entre l'axe & chacun des ſinus d'un arc, terminé au ſommet, eſt égale, étant priſe quatre fois, au quarré de l'arc; plus, le quarré de la diſtance entre les ſinus extrêmes, multiplié chacun par le rayon.

Je dis que la ſomme des eſpaces DIAB, *priſe quatre fois, eſt égale au quarré de l'arc* BP, *multiplié par* AB; *plus le quarré de la droite* AO, *multiplié auſſi par* AB.

Car ces eſpaces *DIAB* ne ſont autre choſe que les ſecteurs *ADB*, plus les triangles rectangles *AID*. Or chaque ſecteur *ADB* eſt égal à la moitié du rectangle, compris de l'arc *BD* & du rayon : donc le ſecteur pris deux fois, eſt égal au rectangle compris de l'arc & du rayon: & partant tous les ſecteurs enſemble pris deux fois, ſont égaux à tous les arcs *BD*, multipliés par *AB*, ou à la moitié du quarré de l'arc entier *BP*,

multiplié par *A B* (puiſque tous les arcs enſemble *B D* ſont égaux à la moitié du quarré de l'arc entier *B P*, parce qu'il eſt diviſé en parties égales). Donc la ſomme des ſecteurs, priſe quatre fois, eſt égale au quarré de l'arc *B P*, multiplié par le rayon. Et chaque triangle rectangle *A I D* eſt la moitié du rectangle de *A I* en *I D*; & partant tous les triangles enſemble *A I D*, pris deux fois, ſont égaux à tous les rectangles *A I* en *I D*, c'eſt-à-dire, par la cinquieme, à la moitié du quarré *A O* en *A B* : donc quatre fois la ſomme des triangles *A I D* eſt égale au quarré *A O*, multiplié par *A B*. Donc quatre fois la ſomme des eſpaces *D I A B* eſt égale au quarré de l'arc *B P*; plus, au quarré de *A O*, multiplié chacun par *A B*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

La ſomme triangulaire des mêmes eſpaces, priſe quatre fois, à commencer par le moindre ſinus, eſt égale au tiers du cube de l'arc; plus, la moitié du ſolide, compris de l'arc & du quarré du rayon, moins la moitié du ſolide, compris du moindre ſinus, & de la diſtance d'entre les extrêmes & du rayon; le tout multiplié par le rayon.

Je dis que la ſomme triangulaire des eſpaces DIAB, *à commencer par* DO, *priſe quatre fois, eſt égale au tiers du cube de l'arc* BP, *multiplié par*

par AB; *plus, la moitié de l'arc* BP, *multiplié par* AB *cube, moins la moitié du rectangle* AO *en* OD, *multiplié par* AB *quarré.*

Car la ſomme triangulaire de ces eſpaces, à commencer par *DO*, ſe forme en prenant, premiérement, la ſomme ſimple de tous ces eſpaces, dont le quadruple eſt égal, par la précédente, au quarré de l'arc *BP*, multiplié par *AB*, plus *AO* quarré multiplié auſſi par *AB*; & en prenant enſuite la ſomme de tous les eſpaces, excepté le premier *BPOA*, ſavoir, la ſomme de tous les eſpaces *BQTA*, *BDIA*, &c., dont le quadruple eſt égal, par la précédente, à l'arc *BQ* quarré, multiplié par *AB*, plus *TA* quarré multiplié par *AB*; & ainſi toujours. Donc quatre fois cette ſomme triangulaire des eſpaces *BDIA*, eſt égale à la ſomme de tous les arcs *BD* quarré multipliés par *AB*, c'eſt-à-dire, au tiers du cube de l'arc entier *BP*, multiplié par *AB*, plus la ſomme de tous les *IA* quarré, ou de tous les *DS* quarré (qui ſont les ſinus ſur l'axe) multipliés par *AB*. Mais la ſomme des ſinus *DS* quarré eſt égale à l'eſpace *BPV*, multiplié par *AB* (par la ſeconde de ces propoſitions) : & en prenant *AB* pour commune hauteur, la ſomme des *DS* ou *IA* quarré multipliés par *AB*, ſera égale à l'eſpace *BPV* multiplié par *AB* quarré.

Donc la ſomme triangulaire de tous les eſpaces

D I A B eſt égale au tiers du cube de l'arc *B P*, multiplié par *A B*; plus à l'eſpace *B P V*, multiplié par *A B* quarré; mais l'eſpace *B P V* eſt égal au ſecteur *B P A*, moins le triangle *A V P*, c'eſt-à-dire, à la moitié du rectangle compris de l'arc *B P* & du rayon *B A*, moins la moitié du rectangle de *A O* en *O P*. Donc cette ſomme triangulaire eſt égale au tiers du cube de l'arc *B P*, multiplié par *A B*, plus la moitié de l'arc multiplié par *A B* cube, moins la moitié de *A O* en *O D*, multiplié par *A B* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

La ſomme triangulaire des quarrés des ſinus d'un arc quelconque, terminé au ſommet, à commencer par le moindre ſinus, eſt égale, étant priſe quatre fois, au quarré de l'arc, plus au quarré de la diſtance entre les ſinus extrêmes, multipliés chacun par le quarré du rayon.

Je dis que la ſomme triangulaire des DI *quarré, priſe quatre fois, à commencer par* DO, *eſt égale au quarré de l'arc* BP, *plus au quarré de la droite* AO, *multipliés chacun par* AB *quarré.*

Car cette ſomme triangulaire des *D I* quarré ſe trouve, en prenant premiérement la ſimple ſomme de tous les *D I* quarré, qui eſt égale, par la ſeconde, à l'eſpace *B D O A* multiplié par *A B*,

&

& en prenant ensuite la somme des mêmes quarrés, excepté le premier *DO*, savoir, *QT* quarré, *DI* quarré, &c., qui sont égaux, par la même seconde, à l'espace *QTAB*, multiplié par *AB*, & ainsi toujours. Donc la somme triangulaire de tous les *DI* quarré est égale à la somme des espaces *DIAB*, multipliée par *AB* : donc aussi leurs quadruples seront égaux; mais la somme de ces espaces, prise quatre fois, est égale au quarré de l'arc *BP*, plus au quarré *AO*, multipliés par *AB* : & en multipliant encore le tout par *AB*, la somme des espaces *DIAB*, prise quatre fois, & multipliée par *AB*, sera égale au quarré de l'arc *BP*, plus au quarré *AO*, multipliés par *AB* quarré. Donc aussi la somme triangulaire des *DI* quarré sera égale au même arc *BP* quarré, plus au même *AO* quarré, multipliés de même par *AB* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.



TRAITÉ



TRAITÉ DES ARCS DE CERCLE.

DÉFINITION.

J'APPELLE *triligne circulaire* toutes les portions d'un quart de cercle, retranchées par une ordonnée quelconque au rayon.

Fig. 20. Soit (*Fig.* 20.) un quart de cercle *A B C*, dont *A* soit le centre, *A B* un des rayons, qui sera appellé l'*axe*; *A C* l'autre rayon perpendiculaire au premier, qui sera appellé *la base*; & le point *B* sera le sommet, *Z M* une ordonnée quelconque à l'axe. L'espace *Z M B* sera appellé *un triligne circulaire*: sur quoi il faut remarquer que le quart de cercle entier est aussi lui-même un triligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

On suppose dans tout ce discours, que la raison de la circonférence au diametre est connue, & que quelque point qu'on donne dans le rayon *B A*, comme *S*, d'où on mene l'ordonnée *S R*, coupant l'arc en *R*, l'arc *B R* retranché par l'ordonnée (& qui s'appelle l'*arc de l'ordonnée*) est aussi donné: & de même que quelque point qui soit donné dans

l'arc

l'arc, comme *R*, d'où on mene *R S* perpendiculaire à *B A*, les droites *R S*, *S B* sont aussi données.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit (Fig. 17.) B S R *un triligne circulaire quelconque donné, dont l'axe* B S *étant divisé en un nombre indéfini de parties égales en* Z, *les ordonnées* Z M *coupent l'arc en* M : *je dis que toutes ces choses seront aussi données; savoir*, 1°. *la somme de tous les arcs* B M; 2°. *la somme des quarrés de ces arcs*; 3°. *la somme des cubes de ces arcs*; 4°. *la somme triangulaire de ces arcs*; 5°. *la somme triangulaire des quarrés de ces arcs*; 6°. *la somme pyramidale de ces arcs.* Fig. 17.

Car en menant les sinus sur la base de ce même arc, ou de l'arc pareil *B P*, pris de l'autre part (pour rendre la figure moins confuse), lesquels sinus coupent l'arc en *D*, la base *S P* du triligne en *T*, & le rayon *A C* en *I* : il a été démontré dans le Traité des Trilignes, que la connoissance de toutes les sommes cherchées dans les arcs *B M*, dépend de la connoissance des mêmes sommes dans les sinus *D T*, & on en a donné toutes les raisons; en sorte que la connoissance des uns enferme aussi celle des autres. Donc il suffira de montrer que toutes ces sommes sont données dans les sinus *D T* pour montrer qu'elles le sont aussi dans les arcs *B M*.

Mais

Mais toutes ces ſommes ſeront connues dans les ſinus *DT*, ſi elles le ſont dans les ſinus entiers *DI*, parce que la droite *TI* ou *SA*, qui eſt donnée, comme on l'a vu dans l'Avertiſſement, eſt une grandeur commune, qui eſt retranchée de toutes les autres *DI* : & partant, par le Traité des ſommes ſimples triangulaires, &c., ces ſommes ſeront données dans les reſtes *DT*, ſi elles le ſont dans les entieres *DI*.

Or toutes ces ſommes ſont données dans les droites *DI*, comme il s'enſuit facilement des propoſitions 1, 2, 3, 7, 8, 11, du Traité des Sinus du quart de cercle.

Car, 1°. la ſomme des droites *DI* eſt donnée, puiſqu'il eſt démontré qu'elle eſt égale au rectangle compris du rayon donné *AB*, & de la droite donnée *AO* ou *SP*.

2°. La ſomme des quarrés *DI* eſt donnée, puiſqu'il eſt démontré qu'elle eſt égale à l'eſpace donné *BPOA* multiplié par le rayon donné *AB*.

3°. La ſomme des *DI* cubes eſt donnée, puiſqu'il eſt démontré qu'elle eſt égale à la ſomme des quarrés des ordonnées au rayon *AC*, compriſes entre les ſinus extrêmes *BA*, *PO*, multipliés par *AB*. Or *AB* eſt connu, & auſſi la ſomme des quarrés de ces ordonnées, puiſque l'eſpace *BPOA* eſt ici donné, & que ſon ſolide autour de *AO* l'eſt auſſi, par Archimede.

4°. La

4°. La ſomme triangulaire de ces ordonnées *DI* eſt auſſi donnée, puiſqu'il eſt démontré qu'elle eſt égale à la différence d'entre les ſinus extrêmes *BA*, *TO*, c'eſt-à-dire, à *BS* qui eſt donnée, multipliée par le quarré du rayon.

5°. La ſomme pyramidale des mêmes ſinus *DI* eſt auſſi donnée, puiſqu'il eſt démontré qu'elle eſt égale à l'excès dont l'arc donné *BP* ſurpaſſe la droite donnée *AO* ou *SP*, multiplié par le cube du rayon.

6°. Enfin la ſomme triangulaire des *DI* quarré eſt donnée, puiſqu'il eſt démontré qu'étant priſe quatre fois, elle eſt égale au quarré de l'arc donné *BP*, plus au quarré de la droite donnée *AO* ou *PS*, multipliés chacun par le quarré du rayon.

PROPOSITION II.

Soit maintenant dans le diamètre du demi-cercle (Fig. 21.) A B C F, *la portion* B H *donnée plus grande que le rayon* B A, *laquelle étant diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points* Z, *ſoient menées les ordonnées* Z D : *je dis que les mêmes ſommes que dans la précédente, ſeront données dans les arcs* B D; *c'eſt-à-dire, la ſomme ſimple des arcs; celle de leurs quarrés & celle de leurs cubes; la ſomme triangulaire des arcs; la ſomme triangulaire de leurs quarrés; & la ſomme pyramidale des arcs.* Fig. 21.

Car en achevant de diviſer la portion reſtante

HF

HF aux points *Z*, en parties égales aux parties de la portion *HB*, & menant les ordonnées *ZS*: il s'ensuit, par la précédente, que toutes ces sommes sont données, tant dans les arcs *FN*, compris entre les points *F* & *C*, que dans les arcs *FS*, compris entre les points *F* & *K* (puisque *FHK* est un triligne circulaire, & que le quart de cercle *FAC* en est un autre, desquels le point *F* est le sommet). Donc aussi les mêmes sommes seront données dans les arcs *FM*, puisque si de tous les arcs *FN* on ôte les arcs *FS*, il restera les arcs *FM*. Donc l'arc *CK* sera une ligne donnée, divisée comme on voudra en un nombre indéfini de parties aux points *D*, ou *M*, ou *S* (car toutes ces lettres ne marquent qu'un même point), à laquelle sont ajoutées de part & d'autre des portions données *KF*, *CB*; & il arrive que toutes les sommes proposées sont données dans les lignes *FM*: donc elles le seront aussi dans les arcs *BM* (par ce qui est démontré à la fin des propriétés des sommes simples triangulaires, &c.) Mais les mêmes sommes sont données, par la précédente, dans les arcs *BO* du quart de cercle *BCA*: donc, en ajoutant les deux ensemble, les mêmes sommes seront données dans tous les arcs *BD*, puisque la somme des arcs *BD* n'est autre chose que la somme des arcs *BO*, plus la somme des arcs *BM*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

De ces propositions, il paroît que si la portion quelconque *A H* donnée est divisée en un nombre indéfini de parties égales en *Z*, d'où soient menées les ordonnées *Z M*, on connoîtra la somme des arcs *F N*, & leurs sommes triangulaires, & leurs sommes pyramidales, &c.

LEMME.

Soit une figure plane quelconque (Figure 28.) ACQT, *dont le centre de gravité soit* Y : *soit divisée cette figure en tant de parties qu'on voudra, & telles qu'on voudra, comme en deux parties* A Q T, A Q C, *desquelles les centres de gravité soient* R, V, *d'où soient menées les perpendiculaires* V S, R K *sur une droite quelconque* A C (*laquelle* A C *ne coupe pas la figure proposée* A C Q T : *mais, ou qu'elle la borne, ou qu'elle en soit entiérement dehors*); *& soit sur la même* A C, *menée la perpendiculaire* Y O *du centre de gravité de la figure entiere* A C Q : *je dis que le solide fait de la figure entiere* A C Q T, *multipliée par son bras* Y O, *est égale à tous les solides ensemble faits des parties, multipliées chacune par son bras particulier, c'est-à-dire, au solide de la figure* T A Q T, *multipliée par son bras* R K, *plus au solide de la figure* Q A C, *multipliée par son bras* V S. Fig. 28.

Car

Car si on entend une multitude indéfinie de droites paralleles à *AC*, & toutes éloignées chacune de sa voisine d'une même distance moindre qu'aucune donnée, & qui coupent ainsi toute la figure, comme il a été supposé dans la méthode des centres de gravité : il est visible, par cette méthode, que la somme triangulaire des portions de cette figure entiere *ACQT*, comprises entre les paralleles voisines, est égale à la figure multipliée par son bras *YO*; & que de même la somme triangulaire des portions de la petite figure *TAQ*, comprises entre les mêmes paralleles, est égale à cette figure *TAQ*, multipliée par son bras *RK*; & enfin que la somme triangulaire des portions de l'autre petite figure *AQC*, comprises entre les mêmes paralleles, est égale à cette même portion *AQC*, multipliée par son bras *VS*. Mais les portions de la figure entiere *ACQT*, comprises entre les mêmes paralleles, ne sont autre chose que les portions de sa partie *ATQ*; plus les portions de sa partie *AQC*, comprises entre les mêmes paralleles : & de même la somme triangulaire des portions de la figure entiere, n'est autre chose que la somme triangulaire des portions de la partie *AQT*; plus la somme triangulaire des portions de l'autre figure *AQC*. Donc aussi la figure entiere *ACQT*, multipliée par son bras *YO*, est égale à la partie *AQT*, multipliée par son bras *RK*;

RK, plus à la partie *AQC* multipliée par son bras *VS*.

COROLLAIRE.

De-là il s'ensuit que la figure entiere *ATQC* multipliée par son bras *YO*, plus la même figure entiere, moins sa premiere portion *AQT*, savoir, la portion *AQC*, multipliée par son bras *VS*, est égale à la premiere partie *AQT* multipliée par son bras *RK*, plus à la seconde portion de la figure *AQC*, multipliée par deux fois son bras *VS*. Ce qui paroît par l'égalité démontrée dans le Lemme, puisqu'on ne fait qu'y ajouter de part & d'autre, le solide de la partie *AQC*, multipliée par son bras *VS*.

Et si la figure étoit divisée en trois parties, comme le secteur *AQC* (*Fig.* 27.), lequel est divisé en trois parties, qui sont les secteurs *QAS*, *SAR*, *RAC*: on montrera de même que la figure entiere *QAC*, multipliée par son bras sur *AC*, plus la figure entiere, moins sa premiere portion *QAS*, c'est-à-dire, la figure restante *SAC*, multipliée par son propre bras sur la même *AC*, plus la figure entiere *QAC*, diminuée de ses deux premieres portions *QAS*, *SAR*, c'est-à-dire, la portion restante *RAC* multipliée aussi par son propre bras sur la même *AC*, sont égales à la premiere portion *QAS* multipliée par son propre bras sur *AC*, plus la seconde portion *SAR* multipliée Fig. 27.

par deux fois son bras sur *A C*, plus la troisieme portion *R A C* multipliée par trois fois son bras sur *A C.*

Et ainsi à l'infini en quelque nombre de portions que la figure soit divisée.

LEMME III.

Fig. 32. *Soit* (Fig. 32.) *un secteur quelconque, qui ne soit pas plus grand qu'un quart de cercle,* D A C *divisé en un nombre indéfini de petits secteurs égaux* Q A S, S A R, R A C, *desquels les centres de gravité soient* P, T, N, *& les bras sur* A C *soient* P O, T O, N O: *je dis que tous les points* P, T, N, *sont dans un arc de cercle concentrique à l'arc* Q D C, *& que les petits arcs* N N *sont tous égaux entre eux, comme les petits arcs* D D *sont aussi égaux entre eux; & que chacun des petits arcs* N N *est à chacun des arcs* D D, *comme le rayon* F A *de l'arc* P T N, *au rayon* D A *de l'arc* Q D C; *& que le rayon* F A *est les deux tiers du rayon* D A.

Cela est visible de soi-même, puisque ces secteurs étant en nombre indéfini, ils doivent être considérés comme des triangles isosceles, desquels le centre de gravité est aux deux tiers de la droite qui divise l'angle par la moitié.

COROLLAIRE.

De-là il paroît que les bras *N O* des secteurs

D A D,

DAD, ſont les ſinus de l'arc *FNI*, dont le rayon eſt les deux tiers du rayon *AD*.

PROPOSITION III.

Soit (Fig. 32.) *un quart de cercle donné* A B C, *dans l'arc duquel ſoit donné le point* Q, *tel qu'on voudra, & ayant diviſé l'arc* Q C *en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où ſoient menés les rayons* A D : *je dis que la ſomme des ſecteurs* A D C *eſt donnée, & égale au quart du quarré de l'arc* Q C *multiplié par le rayon* A B. Fig. 32.

Car chaque ſecteur *ADC* eſt égal à la moitié de l'arc *DC* multiplié par le rayon *AB*. Or puiſque l'arc *QC* eſt diviſé en parties égales, la ſomme de tous les arcs *DC* ſera égale à la moitié du quarré de l'arc entier *QC*; & partant la moitié de la ſomme des mêmes arcs *DC* ſera égale au quart du quarré de l'arc *QC* : & en multipliant le tout par *AB*, la moitié de tous les arcs *DC* multipliés par *AB*, c'eſt-à-dire, la ſomme des ſecteurs *ADC* ſera égale au quart du quarré de l'arc *QC* multiplié par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſomme triangulaire des mêmes ſecteurs A D C, *à commencer du côté de* Q A, *eſt donnée, & égale à la douzieme partie du cube de l'arc* Q C, *multiplié par le rayon.*

 Car

Car la ſomme triangulaire des ſecteurs *ADC*, à commencer du côté de *AQ*, n'eſt autre choſe que la ſimple ſomme de tous les ſecteurs *ADC*, priſe une fois, c'eſt-à-dire, par la précédente, le quart de *QC* quarré en *AB*, plus la ſimple ſomme des mêmes ſecteurs *ADC*, excepté le premier *QAS*, c'eſt-à-dire, la ſomme des ſecteurs *SAC*, *RAC*, &c. qui ſont égaux, par la précédente, au quart de *SC* quarré en *AB*, & ainſi des autres. D'où il paroît que la ſomme triangulaire des ſecteurs *ADC* eſt égale au quart des quarrés de tous les arcs *DC*. Mais la ſomme des quarrés de tous les arcs *DC* eſt égale au tiers du cube de l'arc entier *QC*; donc la ſomme triangulaire des ſecteurs *ADC* eſt égale à la douzieme partie du cube de l'arc entier *QC*, multiplié par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

Fig. 32. *Soit* (Fig. 32.) *le point* Q, *donné où l'on voudra dans l'arc* BC *du quart de cercle donné* BAC; *& ſoit l'arc* QC, *diviſé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où ſoient menés les rayons* DA: *je dis que la ſomme des ſolides, compris de chaque ſecteur* ADC *& de ſon propre bras ſur* AC, *eſt connue & égale au tiers de l'arc* DC, *moins le tiers de la droite* CK (*en menant le ſinus* QK) *multiplié par* AB *cube.*

Car

Car pour connoître la ſomme de ces ſolides, il ſuffira de connoître la ſomme de ces autres ſolides qui leur ſont égaux, par le ſecond Lemme; ſavoir, le petit ſecteur *Q A S* multiplié par ſon propre bras *P O*, plus l'autre petit ſecteur *S A R* multiplié par deux fois ſon propre bras *T O*, plus le petit ſecteur *R A C* multiplié par trois fois ſon propre bras *N O*, & ainſi toujours; c'eſt-à-dire, le petit ſecteur *Q A S*, ou le rectangle compris du rayon *A B*, & de la moitié du petit arc *Q S* ou *D D*, multiplié par *P O* pris une fois, plus par *T O* pris deux fois, plus par l'autre *N O* pris trois fois, & ainſi toujours; c'eſt-à-dire, la ſomme triangulaire des bras *N O*, à commencer par *P O*, multipliés chacun par la moitié des petits arcs *D D*, & le tout multiplié par *A B*.

Or le rayon *A B* eſt connu : donc ſi on connoît encore la ſomme triangulaire des bras *N O* (multipliés chacun par la moitié des petits arcs *D D*), on connoîtra la ſomme de tous les ſolides propoſés.

Mais, par le Lemme précédent, tous ces bras *N O* ſont les ſinus de l'arc *F P I*, deſquels la ſomme triangulaire eſt connue par le Traité des Sinus, & égale au ſolide compris de *A F* quarré, & de la différence dont l'arc *F N I* ſurpaſſe la droite *G I* (lorſque les ſinus *N O* ſont multipliés par les petits arcs *N N*). Et partant cette ſomme triangu-

laire des sinus *NO* sera à la somme triangulaire des mêmes sinus *NO* multipliés par les petits arcs *DD*, en raison donnée; savoir, comme *AF* quarré à *AQ* ou *AB* quarré (parce que la somme triangulaire de ces sinus multipliés par ces petits arcs, est un solide duquel les arcs donnent deux dimensions). Donc cette somme triangulaire des sinus *NO* multipliés par les arcs *DD*, est égale à l'arc *FNI*, moins la droite *IG*, multiplié par *AB* quarré, ou aux deux tiers de l'arc *QC*, moins les deux tiers de la droite *CK*, multipliés par *AB* quarré. Et par conséquent la somme triangulaire des mêmes sinus *NO* multipliés par la moitié des petits arcs *DD*, est égale à un tiers de l'arc *QC*, moins un tiers de la droite *CK*, multiplié par *AB* quarré. Et en multipliant le tout par *AB*, le tiers de l'arc *QC*, moins le tiers de la droite *CK*, multipliés par *AB* cube, sera égal à la somme triangulaire des mêmes sinus *NO* multipliés par la moitié des petits arcs *DD*, & le tout multiplié par *AB*; ce qui est démontré être égal aux solides proposés à connoître.

PROPOSITION VI.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides, compris de chaque secteur ADC *& de son bras sur* AB, *est donnée, & égale au tiers de la droite* CK *multipliée par* AB *cube.*

Car

Car en menant les bras *NT* ſur *AB*, qui ſeront auſſi des ſinus, on démontrera de même que la ſomme des ſolides propoſés eſt égale à la ſomme triangulaire des bras ou ſinus *NT*, à commencer par *PT*, multipliés chacun par la moitié des petits arcs *DD*, & le tout multiplié par *AB*.

Et d'autant que la ſomme triangulaire des ſinus *NT* (multipliés chacun par les petits arcs *NN*) eſt égale, par le Traité des Sinus, à la droite *IG* multipliée par *AF* quarré : on conclura, comme en la précédente, que la ſomme triangulaire des mêmes ſinus *NT* multipliés par la moitié des petits arcs *DD*, & le tout multiplié par *AB*, eſt égale au tiers de la droite *CK* multipliée par *AB* cube.

PROPOSITION VII.

Soit donné (Fig. 27.*) le même quart de cercle* ABC, *& un point* Q *dans ſon arc, d'où ſoient menés les ſinus* DX *& les rayons* DA *: je dis que la ſomme des triangles* AXD *eſt donnée, & égale au quart du quarré de la droite* AZ, *qui meſure la diſtance entre les ſinus extrêmes, multipliée par le rayon.* Fig. 27.

Car tous ces triangles *AXD* ſont la moitié des rectangles *AX* en *XD*, la ſomme deſquels eſt démontrée, dans le Traité des Sinus, être égale à la moitié du quarré de la droite *AZ* multipliée par *AB*. Donc, &c.

PROPOSITION VIII.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſomme triangulaire des mêmes triangles AXD, *à commencer du côté de* QX, *eſt donnée & égale à la huitieme partie de l'arc* QC, *multipliée par* AB *cube, moins la huitieme partie du rectangle compris du dernier ſinus* QZ *& de* ZA (*qui eſt ſa diſtance du point* A) *multipliée par* AB *quarré.*

Car la ſomme triangulaire des triangles *AXD*, à commencer du côté de *ZQ*, n'eſt autre choſe que la ſimple ſomme de tous, c'eſt-à-dire, par la précédente, un quart de *AZ* quarré multiplié par *AB*, plus la ſomme des mêmes triangles *AXD*, excepté le premier *AZQ*, qui ſera égal, par la précédente, au quart de *AV* quarré, multiplié par *AB*; & ainſi toujours. De ſorte que la ſomme triangulaire de ces triangles eſt égale au quart de la ſomme des quarrés *AX* multipliés par *AB*, ou au quart des quarrés *DI* multipliés par *AB*, ou au quart de l'eſpace *QKC* multiplié par *AB* quarré (car la ſomme des quarrés des ſinus *DI* eſt égale à l'eſpace *QKC* multiplié par *AB*, par le Traité des Sinus); c'eſt-à-dire, au quart du ſecteur *AQC* multiplié par *AB* quarré, moins le quart du triangle *AKQ* multiplié par *AB* quarré. Ce qui eſt la même choſe qu'un huitieme de l'arc *QC*, multiplié par *AB* cube,

cube, moins un huitieme du rectangle *QZ* en *ZA*, multiplié par *AB* quarré.

PROPOSITION IX.

Soit un quart de cercle (Fig. 27.) *donné, dans l'arc duquel soit donné le point quelconque* Q, *& l'arc* QC *étant divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points* D, *d'où soient menés les sinus* DX *& les rayons* DA : *je dis que la somme des solides, compris de chaque triangle* AXD *& de son bras sur* AC, *est donnée & égale au tiers de la portion* AZ *en* AB *cube, moins le tiers de la somme des quarrés des ordonnées à la portion* AZ (*qui sont donnés, puisque l'espace* AZQC, *& son solide autour de* AZ *sont donnés par Archimede*) *multipliés par* AB. Fig. 27.

Car le bras de chacun de ces triangles sur *AC*, est les deux tiers de chaque *AX*; donc la somme des solides proposés n'est autre chose que la somme des triangles *AXD* multipliés chacun par les deux tiers de son côté *AX*. Or chaque triangle rectangle *AXD* multiplié par les deux tiers de son côté *AX*, est égal au tiers de *AX* quarré en *XD*, c'est-à-dire (chaque *AX* quarré étant *AD* quarré, moins *DX* quarré), au tiers de chaque *AD* quarré en *DX*, moins le tiers de chaque *DX* cube. Donc tous les triangles ensemble *AXD* multipliés chacun par les deux tiers de *AX*, sont égaux

égaux au tiers de tous les *DX* multipliés par *AD* ou *AB* quarré, moins le tiers de la somme de tous les *DX* cubes, c'est-à-dire (puisque tous les *DX* sont égaux à *AZ* en *AB*, & que tous les *DX* cubes sont égaux aux quarrés des ordonnées à la portion *AZ*, multipliés par *AB*), au tiers de la portion *AZ* en *AB* cube, moins le tiers de la somme des quarrés des ordonnées à la portion *AZ*, multipliés par *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides, compris de chacun des triangles AXD, *multiplié par son bras sur* AB, *est donnée, & égale à un sixieme de* CK (*qui est la différence entre les sinus extrêmes*), *multipliée par* AB *cube, moins un sixieme de la somme des quarrés des ordonnées à la portion* CK (*laquelle est donnée, puisque l'espace* QKC *& son solide sont donnés par Archimede*) *multipliée par* AB *quarré.*

Car chacun de ces triangles est la moitié du rectangle *AX* en *XD*, & le bras de chacun sur *AB* est le tiers de *XD*. Donc la somme de ces triangles multipliés par ces bras, est la moitié des rectangles *AX* en *XD*, multipliée par un tiers de *XD*; c'est-à-dire, un sixieme des solides *AX* en *XD* quarré, ou (puisque chaque *XD* quarré est

eſt égal à *AD* quarré, moins *AX* quarré) un ſixieme des ſolides de *AX* en *AD* quarré, moins un ſixieme des *AX* cubes, ou un ſixieme des ſolides des *DI* en *AD* quarré, moins un ſixieme des *DI* cubes; c'eſt-à-dire (puiſque la ſomme des *DI* eſt égale à *CK* en *AB*, & que la ſomme des *DI* cubes eſt égale à la ſomme des quarrés des ordonnées à la portion *CK*, multipliées par *AB*) un ſixieme de la portion *CK* en *AB* cube, moins un ſixieme de la ſomme des quarrés des ordonnées à la portion *CK*, multipliée par *AB* quarré.

COROLLAIRE PREMIER.

Si le point donné *Q* eſt au point *B*, c'eſt-à-dire, ſi on conſidere tout le quart de cercle entier, au lieu de n'en conſidérer que la portion *AZQC*: on y conclura les mêmes choſes qu'on a faites juſqu'ici, puiſque ce n'eſt qu'un cas de la propoſition générale, & que même ce cas eſt toujours le plus facile.

Il faudra entendre la même choſe dans les propoſitions ſuivantes.

COROLLAIRE II.

De toutes ces propoſitions, il s'enſuit que s'il y a un quart de cercle donné (*Fig.* 27.) *ABC*, dans l'arc duquel ſoit donné le point *Q*, & que Fig. 27.

l'arc

l'arc *Q C* étant diviſé en un nombre indéfini d'arcs égaux en *D*, on en mene les ſinus *D X* & les rayons *D A*. Il arrivera :

1°. Que la ſomme des eſpaces *A X D C* ſera donnée, puiſque chacun de ces eſpaces eſt compoſé du ſecteur *A Q C* & du triangle *A X D*, & que la ſomme de ces parties eſt donnée ; c'eſt-à-dire, tant la ſomme des ſecteurs *A Q C*, que celle des triangles *A X D*, eſt donnée par les précédentes.

2°. Que la ſomme triangulaire des mêmes eſpaces *A X D C* eſt donnée. Car elle eſt égale aux ſommes triangulaires de leurs parties qui ſont données par les précédentes.

3°. Que la ſomme de ces eſpaces *A X D C*, multipliés chacun par ſon bras ſur *A C*, eſt donnée : car la ſomme de leurs parties (ſavoir de ſes ſecteurs & de ſes triangles), multipliées chacune par leurs bras ſur *A C*, eſt donnée par les propoſitions précédentes. Et il a été montré, par les Lemmes précédents, que la figure entiere, multipliée par ſon bras ſur *A C*, eſt égale à ſes parties multipliées chacune par leurs bras ſur la même *A C*.

4°. Que la ſomme des mêmes eſpaces *A X D C*, multipliés chacun par ſon bras ſur *A B*, eſt donnée : car elle eſt égale à la ſomme de leurs parties multipliées par leurs bras ſur la même *A B*, qui eſt donnée par les propoſitions précédentes.

PROPOSITION

PROPOSITION XI.

Soit (Fig. 30.) *un quart de cercle donné* M T G, *dans le rayon duquel ſoit donné le point quelconque* P, *d'où ſoit menée l'ordonnée* P V, *& la portion* P M *diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points* O, *d'où ſoient menées les ordonnées* O R : *je dis que la ſomme des rectangles compris de chaque ordonnée* O R *& de ſon arc* R M (*compris entre l'ordonnée & le ſommet* M), *eſt donnée.* Fig. 30.

Car en prenant dans un autre quart de cercle pareil *A B C* (*Fig.* 31.) le point correſpondant *Z*, & menant le ſinus *Q Z*, & diviſant l'arc entier *B Q C* aux points *D*, en un nombre indéfini d'arcs égaux, tant entre eux, qu'aux portions égales *O O* de la droite *M P*, d'où ſoient menés les ſinus *D X* : il a été démontré dans le Traité des Trilignes, Propoſition XII, que la ſomme des rectangles, compris de chaque *O R* & de l'arc *R M*, eſt égale à la ſomme des eſpaces *Q Z L N* (compris entre le ſinus *Q Z* & chacun des autres ſinus *D N* ou *L N*, qui ſont entre les points *Q*, *B*). Fig. 31.

Or la ſomme de ces eſpaces eſt donnée; car ſi de la ſomme des eſpaces *A X D C* (compris entre *A C* & le point *B*), qui eſt donnée par les propoſitions précédentes, on ôte la ſomme des eſpaces *A X S C* (compris entre *A C* & *Z Q*) qui eſt auſſi

donnée

donnée par les Corollaires précédents : les portions restantes *ANLC* seront aussi données ; c'est-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), la somme des portions *ZNLQ*, plus la portion *AZQC* prise autant de fois, c'est-à-dire, multipliée par l'arc *BLQ* : mais cette portion *AZQC* multipliée par l'arc *BQ*, est donnée, puisque, tant la portion, que l'arc sont donnés. Donc la somme des portions *ZNLQ* sera donnée ; & partant aussi la somme des rectangles compris de chaque *OR*, & de l'arc *RM*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XII.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme des solides, compris de chaque OR *& du quarré de l'arc* RM, *est donnée.*

Car en reprenant la même Figure, il a été démontré dans le Traité des Trilignes, Proposition XIII, que la somme de ces solides est double de la somme triangulaire des portions *ZNLQ*, à commencer par *B*.

Il suffira donc de montrer que cette somme triangulaire est donnée, & on le montrera en cette sorte.

Si de la somme triangulaire de toutes les portions *AXDC*, qui est donnée par les Corollaires précédents, on ôte la somme triangulaire de toutes les portions *AXSC*, qui est aussi donnée par les mêmes

mêmes propositions, la somme triangulaire restante des portions *ANLC* sera donnée (c'est-à-dire, en prenant les parties au lieu du total) la somme triangulaire des portions *ZNLQ*, plus la portion *AZQC*, prise autant de fois, ou multipliée par la moitié du quarré de l'arc *BQ* (car la somme triangulaire d'un nombre indéfini de points est égale à la moitié du quarré de leur somme simple); mais la portion *AZQC* est donnée, & aussi la moitié du quarré de l'arc *BQ*. Donc la somme triangulaire des *ZNLQ* l'est aussi. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIII.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la sommes des quarrés des ordonnées RO, *multipliés chacun par l'arc* RM, *est donnée.*

Car, par la Proposition XV des trilignes, la somme de ces solides est double de la somme des solides, compris de chaque espace *ZNLQ*, multiplié par son bras sur *AB*. Donc il suffira de connoître la somme de ces derniers solides. Ce qui se fera en cette sorte.

Si de la somme des solides, compris de chaque espace *AXDC* & de son bras sur *AB*, qui est donnée par le Corollaire précédent, on ôte la somme des solides, compris de chaque espace *AXSC* & de son bras sur *AB*, on aura la somme des solides,

ſolides, compris de chacun des eſpaces reſtants *ANLC* & de ſon bras ſur *AB*; c'eſt-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), qu'on connoîtra la ſomme des ſolides, compris de chaque eſpace *ZNLQ* & de ſon bras ſur *AB*, plus l'eſpace *AZQC* pris autant de fois, ou multiplié par l'arc *BQ*, & le tout multiplié par le bras de cet eſpace *AZQC* ſur *AB*; car il a été démontré, dans les Lemmes de ce Traité, que l'eſpace entier quelconque *ANLC*, multiplié par ſon bras ſur *AB*, eſt égal à la portion *AZQC*, multipliée par ſon bras ſur *AB*, plus à la portion reſtante *ZNLQ* multipliée toujours par ſon bras ſur la même *AB*.

Or on connoît l'eſpace *AZQC*, multiplié par *BQ*, & le tout multiplié par ſon bras ſur *AB*, puiſqu'on connoît l'arc *BQ*, l'eſpace *AZQC* & ſon bras ſur *AB*. Donc on connoît la ſomme reſtante des eſpaces *ZNLQ* multipliés chacun par ſon bras ſur *AB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIV.

Les mêmes choſes étant poſées : je dis que la ſomme triangulaire des rectangles, compris de chaque ordonnée OR *& de ſon arc* RM, *eſt donnée, ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des* PO *en* OR *en* RM.

Car cette ſomme eſt égale, par la Propoſition

XIV

XIV des trilignes, à la ſomme des ſolides, compris de chaque eſpace *ZNLQ* & de ſon bras ſur *ZQ*. Donc il ſuffira de connoître cette derniere ſomme, ou même il ſuffira de connoître la ſomme des ſolides, compris de chacun des mêmes eſpaces *ZNLQ* & de ſon bras ſur *AC*; puiſque chaque bras ſur *ZQ* differe du bras ſur *AC* d'une droite égale à *ZA*, & que la ſomme des eſpaces *ZNLQ*, multipliés chacun par *ZA*, eſt donnée (*ZA* étant donnée, & auſſi la ſomme des eſpaces *ZNLQ*). Or on connoîtra cette ſomme des eſpaces *ZNLQ*, multipliés chacun par ſon bras ſur *AC*, en cette ſorte:

Si de la ſomme des eſpaces *AXDC*, multipliés chacun par ſon bras ſur *AC*, qui eſt donnée par le Corollaire précédent, on ôte la ſomme des eſpaces *AXSC*, multipliés chacun par leurs bras ſur *AC*, qui eſt auſſi donnée par le même Corollaire, la ſomme reſtante des eſpaces *ALNC*, multipliés par leurs bras ſur *AC*, ſera connue; c'eſt-à-dire (en prenant les portions au lieu du total), la ſomme des portions *ZNLQ*, multipliées chacune par ſon bras ſur *AC*, plus *AZQC* pris autant de fois (ou multiplié par l'arc *BQ*), & le tout multiplié par le bras de l'eſpace *AZQC* ſur *AC*. Or on connoît ce dernier produit de l'eſpace *AZQC*, multiplié de cette ſorte (puiſqu'on connoît l'eſpace *AZQC*, & ſon bras ſur *AC*, & l'arc *QB*).

Donc on connoît la ſomme des eſpaces *ZNLQ*, multipliés chacun par ſon bras ſur *AC*. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

Fig. 30. *Soit donné un demi-cercle* MTF (Fig. 30.) *dont* G *ſoit le centre, & dont le diametre* MF *ſoit diviſé en un nombre indéfini de parties égales aux points* O, *d'où ſoient menées les ordonnées* OA; *& ſoit donnée une ordonnée quelconque* PV, *menée du point donné* P *dans le demi-diametre* GM : *je dis que la ſomme des rectangles compris de toutes les ordonnées* OI (*qui ſont entre l'ordonnée* PV *& le point* F, *qui eſt l'extrémité de l'autre demi-diametre* GF) *& de l'arc* IF (*entre chaque ordonnée & le point* F) *eſt donnée.*

Car ſi on ôte la ſomme des rectangles *OR* en *RM* (compris de toutes les ordonnées, depuis *PV*, juſqu'à *M*, & de leurs arcs), qui eſt donnée par la précédente, de la ſomme des rectangles *OS* en *SM* (compris des ordonnées, depuis le rayon *GT*, juſqu'à *M*, & de leurs arcs), qui eſt auſſi donnée par la même précédente : les rectangles reſtants *OC* en *CM*, compris des ordonnées *OC* entre *GT* & *PV*, & de leurs arcs, ſeront connus.

Donc par les propriétés des ſommes ſimples triangulaires, &c., en conſidérant l'arc *TV* comme une ligne donnée, diviſée en un nombre indéfini de

telles

telles parties qu'on voudra, aux points *C*, à laquelle sont ajoutées de part & d'autre les lignes données *VRM*, *TBF*, & en prenant les droites *CO* pour *coéfficientes* : il s'ensuit que puisque la somme des rectangles *OC* en *CM* est donnée, aussi la somme des rectangles *OC* en *CF* (compris de chaque *CO* & de l'arc *CBF*) sera donnée.

Mais la somme des rectangles *OD* en *DF* (compris des ordonnées entre *GT* & *F*, & de leurs arcs *DF*) est donnée, par la précédente. Donc la somme, tant des rectangles *OC* en *CF*, que des rectangles *OD* en *DF*, est donnée, c'est-à-dire, la somme des rectangles *OI* en *IF*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

Les mêmes choses étant posées : je dis que la somme triangulaire des mêmes rectangles OI *en* IF *(compris des ordonnées qui sont entre* P *&* F, *& de leurs arcs jusques à* F*) est donnée; & aussi la simple somme des* OI *quarré en* IF; *& la simple somme des* OI *en* IF *quarré.*

Car on montrera de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des rectangles *OS* en *SM* est donnée (compris des ordonnées qui sont entre *GT* & *M*, & de leurs arcs jusqu'à *M*); & aussi la simple somme de tous les *OS* quarré en *SM*; & celle de tous les *OS* en *SM* quarré.

Et on démontrera aussi de même que la somme triangulaire des *OR* en *RM* est donnée (compris des ordonnées qui sont entre *PV* & *M*, & de leurs arcs); & aussi la simple somme des *OR* quarré en *RM*; & aussi celle des *OR* en *RM* quarré.

D'où on conclura de même qu'en la précédente, que la somme triangulaire des *OC* en *CM* (compris des ordonnées qui sont entre *G* & *P*, & de leurs arcs jusqu'à *M*) est donnée ; & aussi la simple somme des *OC* quarré en *CM*; & aussi celle des *OC* en *CM* quarré.

Et de-là on conclura par la propriété des sommes simples triangulaires, &c., que puisqu'on connoît la somme des ordonnées *OC*, qui sont les coéfficientes, & aussi leurs sommes triangulaires, & aussi la simple somme de leurs quarrés (car l'espace *GTVP* est connu, & partant la somme des ordonnées *OC*; & le centre de gravité de cet espace *GTVP* est aussi connu, & partant la somme triangulaire des *OC*, ou la somme des rectangles *GO* en *OC*; & aussi le solide de l'espace *GTVP* tourné autour de *GP*, & partant la somme des quarrés *OC*) : il s'ensuit qu'on connoîtra aussi la somme triangulaire des *OC* en *CF*, compris des mêmes *OC* & de leurs arcs jusqu'à *F*; & aussi la simple somme des *OC* quarré en *CF*; & aussi celle des *OC* en *CF* quarré. Mais on connoît, par la précédente,

précédente, la somme triangulaire des *OD* en *DF*, compris des ordonnées qui sont entre *G* & *F*, & de leurs arcs jusqu'à *F*, & aussi la simple somme des *OD* quarré en *DF*, & celle des *OD* en *DF* quarré.

Donc en ajoutant les deux ensemble, on aura la somme triangulaire des *OI* en *IF*, compris des ordonnées entre *P* & *F*, & de leurs arcs jusqu'à *F*; & aussi la simple somme des *OI* quarré en *IF*, & celle des *OI* en *IF* quarré. Ce qu'il falloit démontrer.





PETIT TRAITÉ
DES SOLIDES CIRCULAIRES.

I. SOit donné le point *V*, où l'on voudra
Fig. 30. (*Fig.* 30.) dans la demi-circonférence donnée *MTF*; ſoit le rayon *GT* perpendiculaire au diametre *MF*, & ſoit menée *VP* parallele à *GT*, & ayant diviſé le diametre entier *FM* en un nombre indéfini de parties égales aux points *O*, d'où ſoient menées les ordonnées *OA*:

J'ai ſuppoſé dans tout le diſcours précédent, comme je ſuppoſe encore ici, qu'on ſache que l'eſpace *GTVP* eſt donné, & auſſi ſon centre de gravité; parce qu'en menant le rayon *GV*, le triangle *GPV* eſt donné, & ſon centre de gravité; & auſſi le ſecteur *GTV*, & ſon centre de gravité, comme cela peut être démontré ſi facilement, & comme cela l'a été par pluſieurs perſonnes, & entre autres par Guldin: en ſuppoſant toujours la quadrature du cercle quand il le faut.

J'ai ſuppoſé de même que l'eſpace *VPM* & l'eſpace *VTFP* ſont donnés, & auſſi leurs centres de gravité: ce qui n'eſt que la même choſe.

J'ai ſuppoſé encore que les ſolides de ces eſpaces tournés autour du diametre *MF*, ſont en-

core

core donnés; ce qui a été démontré par Archimede.

De toutes lesquelles choses j'ai pris pour supposé qu'on sût que la somme des ordonnées *OC* entre *G* & *P* est donnée, & que la somme de leurs quarrés le sera aussi; & de même la somme triangulaire de ces mêmes droites *OC*, ou la somme des espaces *VCOP*, ce qui n'est que la même chose (comme on l'a assez vu dans la Lettre à M. de Carcavi); parce que la somme des droites *OC*, n'est autre chose que l'espace *GTVP*, & que la somme triangulaire des *OC* est égale à cet espace multiplié par son bras sur *GT*; & que le solide de la figure *GTVP* autour de *GP* étant donné, la somme des cercles dont *OC* sont les rayons, est donnée; & partant aussi la somme des quarrés *OC*.

Il faut entendre la même chose des ordonnées *OR*, qui sont entre *P* & *M*, & des ordonnées *OI* qui sont entre *P* & *F*.

II. Je dis maintenant que le centre de gravité du solide de l'espace *VMP*, tourné autour de *MP*, est donné.

Car, en prolongeant les ordonnées *RO* jusqu'en *Z*, en sorte que toutes les *OZ* soient entre elles comme les quarrés *OR*, l'espace *MZP* sera une portion de parabole, & son centre de gravité *Y*

ſera donné par Archimede : d'où menant *Y B* perpendiculaire à *P M*, le point *B* ſera viſiblement le centre de gravité du ſolide *M V P* autour de *M P* ; puiſque *M P* étant une balance, aux points *O* de laquelle pendent pour poids les perpendiculaires *O Z*, qu'étant en équilibre au point *B*, elle ſera en équilibre au même point *B*, ſi on entend qu'au lieu des perpendiculaires *O Z*, on y pende pour poids les cercles qui leur ſont proportionnels & qui compoſent ce ſolide, & dont les *O R* ſont les rayons. Et elle ſera encore en équilibre au même point *B*, ſi on y pend pour poids les *O R* quarré.

D'où il paroît que la ſomme triangulaire des *O R* quarré eſt auſſi donnée, puiſqu'elle eſt égale, par la méthode générale des centres de gravité, à la ſomme des *O R* quarrés, multipliés par leurs bras *B P*.

Il faut entendre la même choſe, par la même raiſon, des ſolides des eſpaces *P V T G* & *P V F*, & de la ſomme triangulaire des quarrés de leurs ordonnées.

III. Je dis auſſi que le ſolide de l'eſpace *M V P*, tourné autour de *P V*, ſera donné, & auſſi ſon centre de gravité.

Car en diviſant *P V* en un nombre indéfini de parties égales en *L*, d'où l'on mene les perpendi-

culaires *KLH*: il eſt viſible, par ce qui vient d'être dit, que la ſomme des *HK* eſt donnée, & leur ſomme triangulaire, & la ſomme de leurs quarrés, & la ſomme triangulaire de leurs quarrés. Et partant en ôtant de toutes la grandeur commune *HL*, la ſomme des quarrés des reſtantes *LK* ſera donnée, & la ſomme triangulaire de ces quarrés; & partant le ſolide de *PVM* autour de *PV*, ſera donné, & auſſi ſon centre de gravité; puiſque ſon bras ſur *PM* multipliant la ſomme des quarrés *LK*, le produit en eſt égal à la ſomme triangulaire des quarrés *LK*. Il faut toujours entendre la même choſe des eſpaces *VTGP* & *VFP*.

IV. Je dis de même que la ſomme des *OR* quarré-quarré eſt donnée.

Car en menant la même parabole *MZZ*, dont le côté droit ſoit le rayon *GM*, & qu'ainſi chaque *RO* quarré ſoit égal à chaque *OZ* en *GM*; & partant auſſi chaque *RO* quarré-quarré, à chaque *OZ* quarré en *GM* quarré: il eſt viſible que puiſque, tant le plan *MZP*, que ſon centre de gravité ſont donnés, le ſolide de *MZP* autour de *MP* ſera auſſi donné; & partant auſſi la ſomme des quarrés *OZ*; mais *GM* quarré eſt auſſi donné; donc la ſomme de *OZ* quarré en *GM* quarré ſera donnée, & par conſéquent la ſomme des *OR* quarré-quarré qui lui eſt égale.

V. Je

V. Je dis enfin que la somme des *RO* cube sera donnée; ou, ce qui est la même chose, que le centre de gravité du demi-solide de l'espace *MVP*, autour de *MP*, sera donné.

Car si le centre de gravité du demi-solide du secteur *MVG*, tourné autour de *MG*, est donné, celui du demi-solide de *MVP* sera aussi donné; puisqu'on sait que le solide du demi-cône du triangle *GVP*, tournant autour de *GP*, est donné, & qu'on connoît la raison de ce cône au solide de *MVP*. Or le centre de gravité du demi-solide du secteur *MVG* autour de *MG*, sera connu, si on connoît le centre de gravité de la surface sphérique de ce demi-solide, décrite par l'arc *MV*, tournant d'un demi-tour autour de *MG*. Car de même que Guldin & d'autres, ont démontré que si du centre de gravité de l'arc *MV*, on mene une droite au centre *G*, les deux tiers de cette droite depuis *G*, donneront le centre de gravité du secteur *MVG*, parce qu'il est composé d'une multitude indéfinie d'arcs semblables à l'arc *MV*, qui sont entre eux comme les nombres naturels 1, 2, 3, &c.; ainsi, & sans aucune différence, on démontrera que si du centre de gravité de la surface décrite par l'arc *MV*, on mene une droite au centre *G*, les trois quarts de cette droite depuis *G*, donneront le centre de gravité du solide décrit par le secteur *MVG*, dans le même mouvement;

parce

parce que ce solide est composé d'un nombre indéfini de portions de surfaces sphériques, semblables à celle qui est décrite par l'arc *MV*, qui sont entre elles comme les quarrés des nombres naturels 1, 2, 3, &c.

Or le centre de gravité de la surface de ce demi-solide sera connu (par la fin du Traité des Trilignes), si en divisant l'arc en un nombre indéfini d'arcs égaux, d'où on mene les sinus sur *MP*, il arrive qu'on puisse connoître la somme de ces sinus, & la somme de leurs quarrés, & la somme des rectangles compris de chaque sinus & de sa distance de *VP*.

Et toutes ces choses sont connues; car, par le Traité des Sinus, l'arc *TV* étant donné, la somme de ces sinus est donnée; & aussi la somme des quarrés de ces sinus; & la somme des rectangles compris de ces sinus, & de leurs distances de *TG*. Mais la somme des sinus de l'arc entier *TM* est donnée; & la somme des quarrés de ces sinus; & la somme des rectangles compris de chaque sinus & de sa distance de *TG*. Donc, en ôtant les uns des autres, la somme des sinus de l'arc *VM* sera donnée; & la somme des quarrés de ces sinus; & la somme des rectangles compris de ces sinus, & de leurs distances de *TG*; & partant aussi la somme des rectangles compris des mêmes sinus & de leurs distances de *VP*, puisqu'ils ne different pas de la somme

me des autres rectangles, compris des mêmes ſinus & de leurs diſtances de la droite *T G*; laquelle ſomme eſt donnée, puiſque *P G* eſt donnée, & auſſi la ſomme des ſinus de l'arc *V M*.

Donc le centre de gravité de cette demi-ſurface ſera donné; & partant celui du demi-ſolide du ſecteur *M V G*; & auſſi celui du demi-ſolide *M V P*; & partant auſſi la ſomme des *O R* cube.

Et, par la même raiſon, la ſomme des cubes des ordonnées du quart de cercle *G T M* & *G T F*, ſera donnée; & partant auſſi la ſomme des cubes des ordonnées de l'eſpace *G T V P*, puiſque ces ordonnées ne ſont que les reſtes de celles du quart de cercle, quand on en a ôté celles des eſpaces *P V M*; & de même les cubes des ordonnées de l'eſpace *P V F* ſont donnés, puiſque ce n'eſt qu'y ajouter le quart de cercle.

VI. On démontrera de même que la ſomme des *L K* cube eſt donnée, puiſque la ſomme des *H K* cube eſt donnée par l'article précédent, & que la droite *H L* eſt une grandeur commune, & ôtée de toutes les *H K*.

VII. Il s'enſuit auſſi de toutes ces choſes, que tant dans l'eſpace *T V P G*, que dans le quart de cercle entier, la ſomme des *G O* cube en *O C* eſt
Fig. 33. donnée, puiſqu'en diviſant (*Fig.* 33.) tout le rayon

rayon *G T*, en un nombre indéfini de parties égales aux points *H* & *Q*, & menant les perpendiculaires *H L* jusqu'à *P V*, & *Q Q* jusqu'à l'arc; & considérant *T V P G* comme un triligne mixte dont *T G* & *G P* sont les droites, & *T V P* la ligne mixte, composée de l'arc *T V*, & de la droite *V P*: la somme de tous les *G O* cube en *O C*, prise quatre fois, est égale à la somme des quarré-quarrés des droites *H L* & *Q Q*. Or la somme des *H L* quarré-quarré est donnée, puisque, tant *H L* ou *G P*, que *P V* sont données; & la somme des *Q Q* quarré-quarré est donnée, par ce qui a été dit ici article IV.

Il faut entendre la même chose de tous les *G O* cube en *O S*, c'est-à-dire, dans tout le quart de cercle *G T M*.

VIII. Il paroît aussi par tout ce qui a été dit, que la somme des *G O* quarré en *O S* est donnée, puisqu'étant prise trois fois, elle est égale, par le Traité des Trilignes, à la somme des cubes des droites *H K*, *Q Q*, qui est donnée par le cinquieme article. Et de même la somme des *G O* quarré en *O C* sera donnée, puisqu'étant prise trois fois, elle est égale à la somme des cubes des droites *H L*, *Q Q*, qui est donnée, puisque la somme des *Q Q* cube est donnée par le cinquieme article, & que la somme des *H L* cube est donnée, *H L* ou *P G* & *P V* étant données.

IX. Il paroît aussi par-là que la somme pyramidale des *OC* est donnée, ou, ce qui est la même chose, la somme triangulaire des espaces *VCOP*, comme on verra dans l'avertissement suivant, puisque le double en est donné, savoir, *GO* quarré en *OC*. Il faut dire le même de la somme pyramidale des *OS*, ou de la somme triangulaire des espaces *MOS*, & de même pour la somme pyramidale
Fig. 30. des *OD* (*Fig.* 30.). Et partant (par la fin du Traité des sommes simples, triangulaires, &c.), la somme pyramidale, tant des droites *OR* entre *P* & *M*, que des droites *OI* entre *P* & *F*, sera donnée, puisque les espaces *MVP*, *TFG*, sont donnés; & qu'ainsi la somme triangulaire des espaces *FCO* sera donnée. Mais la somme triangulaire des espaces *FDO* est aussi donnée (puisque ce n'est que la somme pyramidale des droites *OD*). Donc, en ajoutant les deux ensemble, la somme triangulaire des espaces *FIO* sera donnée, c'est-à-dire, la somme pyramidale des droites *OI*. On le démontrera de même de celle des droites *OR*.

AVERTISSEMENT.

On a dit en un mot que la somme pyramidale des droites *OC*, est la même chose que la somme triangulaire des espaces *VCOP* : & on a dit aussi dans le commencement, que la somme triangulaire des mêmes *OC* est la même chose que la simple

somme

ſomme des eſpaces *VCOP*; parce que l'un & l'autre eſt viſible, & aſſez expliqué par la Lettre à M. de Carcavi.

Car la ſomme triangulaire des *OC*, à commencer par *G*, n'eſt autre choſe que la ſimple ſomme de ces lignes, c'eſt-à-dire, l'eſpace *GTVP*, plus la ſimple ſomme de ces mêmes lignes, excepté la premiere *GT*, c'eſt-à-dire, l'eſpace *YCVP*; & ainſi toujours. De ſorte que la ſomme triangulaire entiere eſt proprement la ſomme de tous les eſpaces *VCOP*.

Et de même la ſomme pyramidale des mêmes *CO*, n'eſt autre choſe que la ſomme des ſommes triangulaires des mêmes lignes; c'eſt-à-dire, premiérement, la ſomme triangulaire de toutes les lignes *CO*, laquelle, par ce qui vient d'être dit, eſt la même choſe que la ſimple ſomme de tous les eſpaces *VCOP* : ſecondement, la ſomme triangulaire de toutes les lignes *OC*, excepté la premiere *TG*, laquelle n'eſt autre choſe que la ſomme de tous les eſpaces *VCOP*, excepté le premier *VTGP* : troiſiémement, la ſomme triangulaire des mêmes droites *OC*, excepté les deux premieres *TG*, *YC*, ce qui eſt encore la même choſe que la ſomme des eſpaces *VCOP*, excepté les deux premiers *VTGP*, *VCYP*; & ainſi toujours. Or cette maniere de prendre les eſpaces *VCOP*, en les prenant premiérement tous; & enſuite tous,

excepté

excepté le premier; & puis tous, excepté les deux premiers, &c.: c'eſt ce qu'on appelle en prendre la ſomme triangulaire; & ainſi la ſomme pyramidale des *OC* n'eſt autre choſe que la ſomme triangulaire des eſpaces *VCOP*.

Et de même la ſomme triangulaire des eſpaces *MRO* eſt la même choſe que la ſomme pyramidale des droites *RO*, & la ſomme triangulaire des eſpaces *FIO* eſt la même choſe que la ſomme pyramidale des droites *IO*.

Toutes ces choſes viennent de ce que les droites *OI* ſont des ordonnées, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont également diſtantes, & partent des diviſions égales & indéfinies du diametre; ce qui fait que la ſimple ſomme des ordonnées eſt la même choſe que l'eſpace compris entre les extrêmes. Mais cela ne ſeroit pas véritable des ſinus, parce que les diſtances d'entre les voiſins ne ſont pas égales entre elles, & qu'ainſi la ſimple ſomme des ſinus n'eſt pas égale à l'eſpace compris entre les extrêmes; à quoi il ne faut pas ſe méprendre.



TRAITÉ



TRAITÉ GÉNÉRAL DE LA ROULETTE:

Ou Problêmes touchant la Roulette, proposés publiquement & résolus par A. Dettonville.

Avertissement.

On suppose ici qu'on sache la définition de la Roulette, & qu'on soit averti des Écrits qui ont été envoyés sur ce sujet à tous les Géometres pour leur proposer les problêmes suivants.

Problêmes proposés au mois de Juin 1658.

Étant donnée (Fig. 22.) *une portion quelconque de la Roulette* COS, *retranchée par une ordonnée quelconque* OS *à l'axe* CO: *trouver la dimension & le centre de gravité, tant du triligne* COS, *que de ses demi-solides formés par ce triligne, tourné premiérement autour de sa base* OS, *& ensuite autour de son axe* CO, *d'un demi-tour seulement: en supposant qu'on connoisse la raison de la base de la Roulette* AF *à son axe* FC, *c'est-à-dire, de la circonférence au diametre?* Fig. 22.

PROBLÊMES proposés au mois d'Octobre 1658.

Trouver la dimension & le centre de gravité des surfaces de ces deux demi-solides?

RÉSOLUTION des Problêmes touchant la dimension & le centre de gravité du triligne & de ses demi-solides.

IL a été démontré à la fin de la Lettre à M. de Carcavi, que pour résoudre tous ces problêmes, il suffit de connoître la dimension & le centre de gravité, tant du triligne *C O S*, que de ses deux doubles onglets, sur l'axe & sur la base. Et il a été démontré dans le Traité des Trilignes, que pour connoître la dimension, & le centre de gravité de ce triligne & de ses doubles onglets, il suffit de connoître ces six choses; savoir, en divisant l'axe *C O* en un nombre indéfini de parties égales en *Z*, d'où soient menées les ordonnées *Z Y*:

1. *La somme des ordonnées* Z Y.
2. *La somme de leurs quarrés.*
3. *La somme de leurs cubes.*
4. *La somme triangulaire des mêmes lignes* Z Y.
5. *La somme triangulaire de leurs quarrés.*
6. *La somme pyramidale des mêmes lignes* Z Y.

Or pour connoître toutes ces sommes, je me sers

ſets d'une ſeule propriété de la Roulette, qui réduit la Roulette à ſon ſeul cercle générateur : la voici.

Chaque ordonnée à l'axe de la demi-Roulette eſt égale à l'ordonnée du demi-cercle générateur, plus à l'arc du même cercle, compris entre l'ordonnée & le ſommet.

Soit C R F *le demi-cercle générateur de la demi-Roulette* C Y A F, *& que les ordonnées à la demi-Roulette* Z Y, *coupent la demi-circonférence en* M : *je dis que chaque ordonnée* Z Y *eſt égale à l'ordonnée* Z M, *plus à l'arc* M C.

Cette propriété eſt trop facile, pour s'arrêter à la démontrer. Or il paroît par-là qu'on trouve la Roulette entiere dans ſon ſeul cercle générateur ; puiſqu'en conſidérant toujours chaque arc *CM* & ſon ordonnée *MZ*, comme une ſeule ligne mixte *ZMC*, on trouvera toutes les ordonnées *ZY* de la demi-Roulette dans toutes les lignes mixtes *ZMC*.

Donc tous les problêmes propoſés touchant la Roulette, qui viennent d'être réduits à la connoiſſance des ſix ſommes des ordonnées à l'axe, ſe réduiront maintenant à la connoiſſance des ſix mêmes ſommes des lignes mixtes *ZMC* : & ainſi tous ces problêmes de la Roulette ſe réduiront aux problêmes ſuivants, où l'on ne parlera point de Roulette, & où l'on ne conſidérera qu'un ſeul demi-cercle.

Fig. 23. *Étant donnés* (Fig. 23.) *un demi-cercle* CRF, *& la portion quelconque* CO *de ſon diametre, laquelle ſoit diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points* Z, *d'où ſoient menées les ordonnées* ZM, *chacune deſquelles, avec ſon arc* MC, *ſoit conſidérée comme une ſeule & même ligne mixte* ZMC : *trouver :*

1. *La ſomme des lignes mixtes* ZMC.

2. *La ſomme des quarrés de ces lignes mixtes* ZMC.

3. *La ſomme des cubes de ces lignes mixtes* ZMC.

4. *La ſomme triangulaire des lignes mixtes* ZMC.

5. *La ſomme triangulaire des quarrés de ces mêmes lignes* ZMC.

6. *La ſomme pyramidale des lignes mixtes* ZMC.

Or tous ces problêmes vont être facilement réſolus par le moyen des Traités précédents, en cette ſorte.

1. *Pour connoître la ſomme des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties; ſavoir, la ſomme des ordonnées *ZM*, plus la ſomme des arcs *CM*. Or la ſomme des ordonnées eſt connue, puiſque l'eſpace *COR* eſt connu : & la ſomme des arcs *CM* eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle. Donc la ſomme des lignes mixtes *ZMC* eſt donnée.

2. *Pour*

2. *Pour connoître la ſomme des quarrés des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties; ſavoir, la ſomme des quarrés *ZM* (qui eſt donnée, puiſque l'eſpace *CRO* eſt donné; & auſſi ſon ſolide autour de *CO*, par Archimede) : plus la ſomme des quarrés des arcs *CM* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle) : plus deux fois la ſomme des rectangles *CM* en *MZ*, compris de chaque arc & de ſon ordonnée (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc puiſque toutes les parties ſont données, le tout ſera donné; c'eſt-à-dire, la ſomme des quarrés des lignes mixtes *ZMC*.

3. *Pour connoître la ſomme des cubes des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties; ſavoir, la ſomme des *ZM* cubes, (qui eſt donnée par le Traité des Solides circulaires) : plus la ſomme des *CM* cube (qui eſt donnée par le Traité des Arcs) : plus trois fois la ſomme des *ZM* quarré en *MC* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs) : plus trois fois la ſomme des *ZM* en *MC* quarré (qui eſt donnée par le même Traité des Arcs). Donc les parties étant données, le tout eſt donné.

4. *Pour connoître la ſomme triangulaire des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme triangulaire des parties ; ſavoir, la ſomme triangulaire des *ZM* (qui eſt donnée par le Traité des Solides circulaires) : plus la ſomme triangulaire des arcs *CM* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc les parties étant données, &c.

5. *Pour connoître la ſomme triangulaire des quarrés des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme triangulaire des parties ; ſavoir, la ſomme triangulaire des *ZM* quarré (qui eſt donnée par le Traité des Solides circulaires) : plus la ſomme triangulaire des *CM* quarré (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle) : plus deux fois la ſomme triangulaire des rectangles *ZM* en *MC* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs, &c.). Donc, &c.

6. *Pour connoître la ſomme pyramidale des lignes mixtes* ZMC.

Il faut connoître la ſomme pyramidale des parties ; ſavoir, la ſomme pyramidale des ordonnées *ZM* (qui eſt donnée par le Traité des Solides circulaires) : plus la ſomme pyramidale des arcs *CM* (qui eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle). Donc, &c.

Et par conséquent on connoît toutes les choses proposées à trouver par les premiers problêmes, touchant la dimension & le centre de gravité de la demi-Roulette & de ses portions, & de leurs demi-solides.

Je viens maintenant aux derniers, pour lesquels j'ai besoin de ces deux Lemmes.

LEMME PREMIER.

Soit CDF *un demi-cercle* (Fig. 26.) *dont* FC *soit le diametre : soit* FCEZ *un autre demi-cercle, dont* CF *prolongée & doublée soit le diametre : je dis que quelque droite qu'on mene du point* F, *comme* FDN, *coupant les deux circonférences en* D, N, *d'où on mene la droite* DC *au point* C, *& les droites* NK, NM, *perpendiculaires, l'une à* FC, *l'autre au rayon* FE, *qui est perpendiculaire à* CZ : *il arrivera toujours que* NM *sera égale à* FK; ce qui est visible : *& que* NK *sera égale à* CD; ce qui se voit par la similitude des triangles rectangles *FKN*, *FDC*, ayant les côtés *FC*, *FN* égaux entre eux. Fig. 26.

Je dis enfin que l'arc CN *sera égal à l'arc* CD.

Car ces arcs sont entre eux en raison composée de la raison des rayons *FC*, *GC* (*G* étant le centre du demi-cercle *CDF*), & de la raison des angles *NFC*, *DGC*. Or un de ces angles est double de l'autre, & réciproquement un des rayons

eſt double de l'autre ; & ainſi la raiſon compoſée de ces deux raiſons, dont l'une eſt double & l'autre ſous-double, eſt la raiſon d'égalité.

LEMME II.

Fig. 25. *Soit* CDF *un demi-cercle* (Fig. 25.) *dont* FC *ſoit le diametre : ſoit* FCEZ *un autre demi-cercle, dont* CF *prolongée & doublée, ſoit le diametre : ſoit* CHK *une parabole dont* CF *ſoit l'axe,* C *le ſommet, & dont le côté droit ſoit égal à* CF *& partant à la baſe* FK : *ſoit donnée une portion quelconque* CO *du diametre, & ſoit* OR *perpendiculaire au diametre. Soient accommodées à l'arc* CR *un nombre indéfini de droites* CD, *dont la premiere ſoit* 1, *la ſeconde* 2, *& ainſi toujours ſelon l'ordre des nombres naturels, toutes terminées au point* C, *& coupant la circonférence aux points* D, *d'où ſoient menées les droites* DG *perpendiculaires à* CF, *coupant la parabole en* H : *ſoient auſſi menées les droites* DF, *du point* F *par tous les points* D, *coupant l'arc* CE *en* N, *d'où ſoient menées* NMV, *paralleles à* CF, *recoupant en* V *la circonférence, & en* M *le rayon* FE *perpendiculaire à* FC :

Je dis que toutes les droites FM *ſeront égales à toutes les droites* CD, *chacune à la ſienne ; & qu'ainſi la plus grande* FM *ſera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points* M. Cela eſt viſible par le Lemme précédent.

Je dis de même que toutes les MN *ou* MV, *ſeront égales à toutes les* FD, *chacune à la ſienne.* Ce qui eſt auſſi viſible par le Lemme précédent.

Je dis de même que les droites FL *ſeront égales aux droites* CD, *chacune à la ſienne ; & qu'ainſi la plus grande* FL *ſera coupée en un nombre indéfini de parties égales aux points* L.

Car par la nature du cercle chaque *CD* quarré eſt égal à chaque rectangle *FC* en *CG*, c'eſt-à-dire ; par la nature de la parabole à chaque *GH* quarré ; & partant chaque *CD* eſt égal à chaque *GH* ou à chaque *FL*.

Je dis auſſi que tous les rectangles compris de CF *& de chaque* GD, *ſont égaux à tous les rectangles* FM *en* MV, *chacun au ſien.*

Car *FC* en *GD* eſt égal à *CD* en *DF*, c'eſt-à-dire, par ce qui vient d'être démontré, à *FM* en *MV*.

AVERTISSEMENT.

Je ſuppoſe qu'on ſache que les mêmes choſes étant poſées que dans le Lemme précédent, ſi le cercle *CDF* eſt le générateur de la demi-Roulette *CBAF*, & qu'on prolonge les droites *DG* juſqu'à ce qu'elles coupent la Roulette au point *B* : il arrivera que toutes les portions *BB* de la courbe ſeront égales entre elles ; parce que chaque portion

tion de la courbe *CB* ſera double de chaque droite *CD*.

C'eſt cette propriété dont j'ai dit dans l'Hiſtoire de la Roulette, que M. Wren l'a produite le premier : je ne m'arrête pas à la démontrer ici, parce que pluſieurs perſonnes l'ont déja fait; car depuis M. Wren, M. de Roberval en a produit une démonſtration & M. de Fermat enſuite, & depuis encore M. Auzoult : & j'ai moi-même démontré la même choſe dans un Traité à part (1), où j'ai fait voir que cette propriété dépend immédiatement de celle-ci ; ſavoir, que ſi la demi-circonférence d'un cercle eſt diviſée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & que de l'extrémité du diametre on mene des droites à chaque point de diviſion, la ſomme de ces droites ſera égale au quarré du diametre.

Et cette propoſition n'eſt encore que la même choſe que celle-ci : la ſomme des ſinus d'un quart de cercle, eſt égale au quarré du rayon (ce qui eſt démontré dans le Traité des Sinus, propoſition I) de ſorte que ces trois propoſitions ne ſont preſque qu'une même choſe.

---

(1) Nous n'avons pas ce Traité ; heureuſement il peut être ſuppléé par celui des Sinus du quart de Cercle.

RÉSOLUTION

RÉSOLUTION des derniers Problêmes touchant la dimenſion & le centre de gravité des ſurfaces des demi-ſolides de la Roulette.

IL a été démontré à la fin de la Lettre à M. de Carcavi, que, pour réſoudre ces problêmes, il ſuffit de connoître la dimenſion & le centre de gravité des ſurfaces courbes, des deux doubles onglets de l'axe & de la baſe. Et il a été démontré dans le Traité des Trilignes, que pour connoître ces choſes, il ſuffit de connoître les cinq ſuivantes; ſavoir, en diviſant (*Fig.* 24.) la ligne courbe *CS* de la portion donnée de la demi-Roulette, en un nombre indéfini de parties égales aux points *B*, d'où ſoient menés les ſinus ſur l'axe *BG*: Fig. 24.

1. *La ſomme des ſinus* BG.
2. *La ſomme des diſtances* GF.
3. *La ſomme des* GF *quarré.*
4. *La ſomme des rectangles* BG *en* GF.
5. *La ſomme des* BG *quarré.*

Or pour connoître toutes ces ſommes, je me ſers de deux propriétés de la Roulette. L'une eſt celle, dont j'ai parlé, qui réduit la Roulette au cercle; ſavoir, que chaque *BG* (coupant le cercle générateur en *D*) eſt égale à la ligne mixte *CDG*, en

en considérant la droite *GD* & l'arc *DC*, comme une seule ligne mixte *GDC*. L'autre, qu'en menant les droites *CD*, chaque portion de la Roulette *CB* sera égale à deux fois la droite *CD*.

D'où il paroît que puisque la premiere portion *CB* de la Roulette est 1, que la seconde *CB* est 2, & ainsi toujours selon l'ordre des nombres naturels : il arrivera aussi que la premiere *CD* sera 1, la seconde *CD*, 2; & ainsi toujours selon la même suite des nombres naturels.

Donc tous les Problêmes des surfaces des demi-solides de la Roulette qui viennent d'être réduits à la connoissance des droites *BG* & *GF*, se réduiront aux problêmes suivants, où l'on ne parlera plus de Roulette, & où l'on ne considérera qu'un seul demi-cercle.

Fig. 24. *Étant donné* (Fig. 24.) *un demi-cercle* CDF *& la portion quelconque* CO *de son demi-diametre, & l'ordonnée* OR; *& un nombre indéfini de droites* CD, *dont la premiere soit* 1, *la seconde* 2, *&c. selon l'ordre des nombres naturels, étant accommodées à l'arc* CR, *& toutes terminées au point* C, *& coupant l'arc aux points* D, *d'où soient menées* DG *perpendiculaires à l'axe; chacune desquelles* DG *avec son arc* DC *soit considérée comme une seule & même ligne mixte : il faut trouver :*

1. *La somme des droites* FG.

2. La

2. *La somme des* FG *quarré.*

3. *La somme des lignes mixtes* GDC.

4. *La somme des quarrés de ces lignes mixtes* GDC.

5. *La somme des rectangles compris de chaque ligne mixte* GDC *& de* FG.

Or tous ces Problêmes vont être résolus en reprenant toute la construction du second Lemme, en cette sorte.

1. *Pour connoître la somme des lignes* FG.

Il suffit de connoître la somme des lignes *LH* qui leur sont égales : or la somme des droites *LH* est connue, puisque l'entiere *FL* étant divisée en un nombre indéfini de parties égales, la somme des *HL* est la même chose que l'espace parabolique *FCHL*, compris entre *FC* & la derniere *HL*, lequel espace est connu par Archimede.

2. *Pour connoître la somme des* FG *quarré.*

Il suffit de connoître la somme des *LH* quarré, laquelle est connue, puisqu'on connoît par Archimede, tant l'espace *FCHL*, que son centre de gravité, & partant son solide autour de *FL*; ce qui donne la somme des quarrés *LH*, & par conséquent des quarrés *FG*.

3. Pour

3. *Pour connoître la ſomme des lignes mixtes* GDC.

Il faut en connoître les parties, ſavoir, la ſomme des droites *GD* & la ſomme des arcs *DC*,

Or la ſomme des droites *DG* ſera connue, ſi en les multipliant chacune par la droite connue *FC*, on peut connoître la ſomme des rectangles *FC* en *DG*, ou la ſomme des rectangles *CD* en *DF*, ou la ſomme des rectangles *FM* en *MV*. Mais puiſque l'entiere *FM* eſt diviſée en un nombre indéfini de parties égales aux points *M*, d'où ſont menées les ordonnées *MV*: il eſt évident que la ſomme des rectangles *FM* en *MV* eſt donnée par le Traité des Solides circulaires; & par conſéquent auſſi la ſomme des rectangles *FC* en *DG*, & partant auſſi la ſomme des *DG*.

Et quant à la ſomme des arcs *DC*, elle eſt la même que la ſomme des arcs *CN*. Car puiſque *FM* eſt diviſée en un nombre indéfini de parties égales, d'où ſont menées les ordonnées *MN*, il s'enſuit, par le Traité des Arcs, que la ſomme des arcs *EN* eſt donnée; & partant auſſi la ſomme des arcs *CN*, qui ſont les reſtes du quart de 90 dégrés. Et par conſéquent auſſi la ſomme des arcs *CD* qui leur ſont égaux.

4. *Pour connoître la ſomme des quarrés des lignes mixtes* GDC.

Il faut connoître la ſomme de leurs parties, ſavoir,

ſavoir, la ſomme des *GD* quarré, plus la ſomme des arcs *DC* quarré, plus deux fois la ſomme des rectangles *GD* en *DC*, compris de chaque *GD* & de ſon arc *DC*.

Or la ſomme des *GD* quarré eſt connue, puiſqu'elle eſt égale à la ſomme des rectangles *FGC*, ou à la ſomme des *LH* en *HI*, leſquels ſont donnés, puiſque leur ſomme doublée eſt égale à la ſomme des entieres *LI* quarré, qui eſt donnée, moins la ſomme des *LH* quarré, qui eſt auſſi donnée, comme il a été dit, moins encore la ſomme des *HI* quarré, qui eſt auſſi donnée, puiſque ce ſont les reſtes de l'entiere *LI*, qui eſt donnée, par les propriétés des ſommes ſimples, ſommes triangulaires, &c.

Et quant à la ſomme des arcs *CD* quarré, ou des arcs *CN* quarré, elle eſt viſiblement donnée, par le Traité des Sommes ſimples, &c., puiſque ce ſont les arcs reſtants du quart de cercle, & que la ſomme des quarrés de leurs compléments *EN* eſt donnée par le Traité des Arcs.

Enfin la ſomme des rectangles de chaque *GD* & de ſon arc *DC* ſera connue, ſi en multipliant le tout par la droite connue *CF*, il arrive qu'on connoiſſe la ſomme des *CF* en *GD* en l'arc *DC*, ou des *FM* en *MN* en l'arc *NC*.

Or la ſomme de ces derniers eſt connue, puiſque (chaque arc *NC* étant égal à *CE* moins *EN*)

cette

cette somme des *FM* en *MN* en *NC* n'est autre chose que la somme des *FM* en *MN* multipliée par l'arc *EC* (qui est donnée, puisqu'on connoît, tant l'arc *EC*, que la somme des *FM* en *MN*), moins la somme des *FM* en *MN* en *NE*, ou la somme triangulaire des rectangles *MN* en *NE*, qui est aussi donnée par le Traité des Arcs de cercle.

4. *Pour connoître la somme des rectangles compris de chaque ligne mixte* CDG *&* *de* GF.

Il faut connoître la somme de leurs parties, savoir, la somme des rectangles *FG* en *GD*, plus la somme des rectangles *FG* en arc *DC*.

Or on connoîtra la somme des *FG* en *GD*, si on connoît la somme des *CG* en *GD* (puisque ce sont les restes de la somme des *CF* en *GD* qui est connue, puisqu'on connoît, tant la droite *CF*, que la somme des droites *DG*); & l'on connoîtra la somme des *CG* en *GD*, si en les multipliant par le quarré connu de *CF*, on peut connoître la somme des *CF* quarré en *CG* en *GD*, ou des *CF* en *CG* en *CF* en *GD*, ou des droites *CD* quarré en *CD* en *DF*, ou des droites *CD* cube en *DF*, ou des *FM* cube en *MV*, laquelle est connue par le Traité des Solides circulaires.

Et quant à la somme des rectangles *FG* en arc *DC*, on démontrera de même qu'elle est connue, si on peut connoître la somme des *GC* en arc *CD*;

CD; & on connoîtra la ſomme des *GC* en arc *CD*, ſi en multipliant le tout par la droite connue *CF*, on peut connoître la ſomme des *CF* en *CG* en arc *DC*, ou la ſomme des droites *CD* quarré en arc *CD*, ou la ſomme des *FM* quarré en arc *NC*, c'eſt-à-dire (puiſque la premiere *FM* eſt 1, la ſeconde, 2, & ainſi toujours) la ſomme pyramidale des arcs *CN*; laquelle ſomme pyramidale des arcs *CN* eſt donnée, par le Traité des Sommes ſimples, triangulaires, &c., puiſque la ſomme pyramidale des arcs reſtants *EN* eſt donnée par le Traité des Arcs de cercle.

Donc on connoît toutes les choſes cherchées touchant la dimenſion & le centre de gravité, des ſurfaces des demi-ſolides de la demi-Roulette & de ſes portions. Mais la dimenſion & le centre de gravité des demi-ſolides ſont déja donnés; & par conſéquent tous les Problêmes touchant la Roulette ſont entiérement réſolus.

Il ſera ſur cela facile à tout le monde de trouver les calculs de tous les cas, par le moyen de ces méthodes.





DIMENSION
DES LIGNES COURBES
DE TOUTES LES ROULETTES.

LETTRE
DE M. DETTONVILLE
A M. HUGUENS DE ZULICHEM.

MONSIEUR,

COMME j'ai ſu que M. de Carcavi devoit vous envoyer mes ſolutions des Problêmes que j'avois propoſés touchant la Roulette, je l'ai prié d'y joindre la dimenſion des courbes de toutes ſortes de Roulettes, que je lui ai donnée pour vous l'adreſſer, parce qu'il m'a dit que vous avez témoigné d'avoir quelque envie de la voir. Je voudrois, Monſieur, que ce pût vous être une marque de l'eſtime que j'ai toujours faite de votre mérite. Je croyois qu'on ne pouvoit rien y ajouter : mais vous l'avez encore augmentée par cette horloge incomparable, & par ces merveilleuſes dimenſions des ſurfaces courbes des Conoïdes que vous venez de produire,

produire, & qui sont un sujet d'admiration à tous nos Géometres. Pour moi je vous avoue que j'en ai été ravi, par la part toute particuliere que je prends à ce qui peut agrandir votre réputation, & par la passion avec laquelle je suis, &c.

DIMENSION

Des lignes courbes de toutes les Roulettes.

JE n'ai qu'une seule méthode pour la dimension des lignes de toutes sortes de Roulettes, en sorte que, soit qu'elles soient simples, alongées ou accourcies, ma construction est toujours pareille, en cette maniere :

Soit (*Fig.* 43.) une Roulette de quelque espece que ce soit, dont *AF* soit la base; *FC* l'axe; & *CMF* la circonférence du cercle générateur, laquelle ait telle raison qu'on voudra à la base *FA* : & ayant divisé cette circonférence en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points *M*, je mene de tous les points de division des droites *MB* paralleles à la base, qui coupent la courbe de la Roulette, chacune en un point *B*; & je joins tous les points voisins *BB*. Fig. 43.

Je suppose que les divisions de la circonférence soient en si grand nombre que la somme de ces droites *BB* (lesquelles sont les sous-tendantes de la

Roulette) ne different de la courbe de la Roulette, que d'une ligne moindre qu'aucune donnée.

J'ai aussi besoin qu'on sache (& je le démontrerai en peu de mots) que si on fait : comme la circonférence du cercle générateur, à la base de la Roulette, ainsi le rayon *F G*, à la portion *G H* de l'axe prise depuis le centre ; & que de l'extrémité *H* de cette portion on mene toutes les droites *H M* : il arrivera que toutes ces droites seront entre elles comme les sous-tendantes *B B* de la Roulette, & qu'elles les représentent ; & c'est pourquoi je les appelle les *représentantes*.

Cela sera visible, si on entend que le cercle générateur soit placé à tous les points *B*, lequel coupe chaque parallele *B M*, voisine au point *O*, en sorte qu'on n'en considere que les arcs *B O*, lesquels seront égaux, tant entre eux, qu'aux arcs *M M*, & les portions *B O* des paralleles seront égales entre elles. Et ainsi chaque arc *B O* sera à la portion *O B* de la parallele, comme la circonférence *F M C* à la base *A F*, ou comme *G M* à *G H*. Et il arrivera ainsi que chacun des petits triangles *B O B* sera semblable à chacun des triangles *M G H* : chacun des angles *H G M* étant égal à chacun des angles *B O B* ou *B M C*, faits de chaque parallele & de la circonférence. Et partant chaque *B B* sera à chaque arc *B O*, comme chaque *H M* à *M G*. Et toutes les *B B* ensemble, c'est-à-dire, la courbe,

be, ſera à tous les arcs égaux enſemble *OB* ou *MM*, c'eſt-à-dire, à la circonférence *CMF*, comme la ſomme des *HM*, à la ſomme des *GM*, ou au rayon multiplié par la circonférence *CMF*. Donc en multipliant les deux premiers termes par le rayon, la courbe multipliée par le rayon, eſt à la circonférence *CMF* multipliée par le rayon, comme la ſomme des repréſentantes *HM*, au rayon multiplié par la circonférence *CMF*; mais les deux conſéquents ſont égaux : donc la courbe multipliée par le rayon eſt égale à la ſomme des repréſentantes *HM* (multipliées chacune par les petits arcs *MM*); mais le rayon eſt donné : donc ſi la ſomme des *HM* eſt donnée, la courbe le ſera auſſi.

Donc toute la difficulté de la dimenſion des Roulettes eſt réduite à ce problême.

La circonférence d'un cercle donné, étant diviſée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & ayant mené des droites d'un point quelconque donné dans le plan du cercle à tous les points de diviſion; trouver la ſomme de ces droites?

Ce problême eſt aiſé à réſoudre, quand le point donné eſt dans la circonférence (comme il arrive quand la Roulette eſt ſimple; c'eſt-à-dire, quand la baſe *AF* eſt égale à la circonférence *CMF*); car alors la ſomme de ces droites eſt égale au quarré du diametre, parce que c'eſt la même choſe

que la ſomme des ſinus droits du quart d'un autre cercle, dont le rayon ſera double.

Et ſi on réſout ce problême quand le point donné eſt au-dehors, il ſera réſolu en même-temps quand le point eſt au-dedans.

Car s'il y a deux cercles concentriques, dont les circonférences ſoient diviſées chacune en un nombre indéfini d'arcs égaux, la ſomme des droites menées d'un point quelconque de la grande circonférence à tous les points de diviſion de la petite, ſera la même que la ſomme des droites menées d'un point quelconque, pris dans la petite circonférence, à tous les points de diviſion de la grande; & chacune des droites d'une multitude ſera égale à chacune des droites de l'autre multitude, parce qu'elles ſont les baſes de triangles égaux & ſemblables. Et ainſi la ſomme des unes ſera égale à la ſomme des autres, pourvu qu'elles ſoient multipliées par les mêmes arcs. Mais ſi on entend qu'elles ſoient multipliées chacune par les arcs auxquels elles ſe terminent, alors la ſomme de celles qui ſont menées aux diviſions de la grande circonférence, ſera à la ſomme des autres, comme la grande circonférence eſt à l'autre, ou comme le grand rayon au petit. Et ainſi ſi la ſomme des unes eſt donnée, la ſomme des autres le ſera auſſi, les deux cercles étant donnés. Or j'ai ce Théorême général.

La circonférence d'un cercle donné étant diviſée en un nombre indéfini d'arcs égaux, & un point quelconque étant pris où l'on voudra, ſoit en la circonférence, ſoit dedans, ſoit dehors, ſoit ſur le plan, ſoit hors du plan, d'où ſoient menées des droites à tous les points de diviſion : je dis que la ſomme de ces droites ſera égale à la ſurface d'un cylindre oblique donné.

Et je le démontre en cette ſorte dans le cas où le point eſt pris hors du cercle, qui eſt le ſeul dont j'ai beſoin ici, & duquel s'enſuivent tous les autres.

LEMME.

Soit le cercle donné A L B (Fig. 44.) *dont la circonférence ſoit diviſée en un nombre indéfini d'arcs égaux en* L; *ſoit le point* H *hors du plan, & élevé perpendiculairement ſur un des points* A, *c'eſt-à-dire, que la droite* A H *ſoit perpendiculaire au plan du cercle; & ſoient menées toutes les* H L : *je dis que la ſomme des droites* H L *multipliées chacune par chaque petit arc* L L, *eſt égale au quart de la ſurface du cylindre oblique, qui aura pour baſe le cercle* A M C, *dont le rayon ſera* A B, *& pour axe la droite* H B, *menée à l'autre extrémité du diametre* A B. Fig. 44.

Car ſoient les côtés du cylindre oblique *M N*, qui coupent la baſe ſupérieure en *N*; & ſoient *M O* les touchantes de la baſe inférieure, ſur leſ-

quelles ſoient menées les perpendiculaires *NO*. Il eſt viſible que le quart de la ſurface oblique *IVTC* eſt composée des parallélogrammes compris des arcs *MM* & des côtés *MN*, ou des rectangles compris des mêmes arcs *MM* & des perpendiculaires *NO* : mais les arcs *MM* ſont égaux, tant entre eux, qu'aux arcs *LL*. Donc ſi la ſomme des perpendiculaires *NO* eſt égale à la ſomme des droites *HL*, ce qui eſt proposé ſera évident.

Or chaque *NO* eſt égal à chaque *HL*, comme il eſt viſible par l'égalité & la ſimilitude des triangles *HBL*, *NMO*.

Car l'axe *HB* eſt égal & parallele au côté *NM*, & les droites *BL*, *MO* ſont paralleles, étant perpendiculaires l'une à *MB*, l'autre à *AL*, qui ſont paralleles à cauſe de l'égalité des angles *CBM*, *BAL*.

PROPOSITION.

Fig. 45. *Soit maintenant* (Fig. 45.) *le point* H, *donné dans le plan du cercle* ALB *& hors le cercle, & ſoient menées les* HL *aux points* L *des diviſions égales : je dis que leur ſomme eſt égale à la ſurface d'un cylindre oblique.*

Car menons le cercle dont *BH* eſt le diametre, & prenons *AV* en ſorte que *BV* quarré ſoit égal à *BA* quarré, plus deux fois le rectangle *BAH*; & menons le cercle dont *BV* ſoit le diametre, & où il arrivera auſſi que quelque droite

qu'on

qu'on mene du point *B*, comme *BLIZ*, le quarré de *BI* sera égal à *BL* quarré, plus deux fois le rectangle *BLZ*.

Soit aussi élevée *VO* perpendiculaire au plan du cercle, & soit prise *BO* égale à *BH*, & soient menées toutes les droites *OI* (aux points où les droites *BL* coupent la circonférence *CIV*) : je dis que chaque droite *OI* est égale à chaque droite *HL*.

Car *HB* quarré est égal à *HL* quarré, plus *LB* quarré, plus deux fois le rectangle *HLY* (en prolongeant *HL* jusqu'au cercle *BZH*), ou à *HL* quarré, plus *LB* quarré, plus deux fois le rectangle *BLZ*, ou à *HL* quarré, plus *BI* quarré : mais aussi *OB* quarré (qui est le même que *HB* quarré) est égal à *OI* quarré, plus *BI* quarré. Donc *OI* quarré, plus *IB* quarré, est égal à *HL* quarré, plus *IB* quarré : donc aussi *OI* quarré est égal à *HL* quarré ; & partant *OI* à *HL*.

Donc la somme des *OI* est la même que la somme des *HL*, si on les multiplie chacune par les mêmes petits arcs ; mais la somme des *OI* (multipliées par les petits arcs *II*, lesquels sont égaux entre eux, puisque les arcs *LL* le sont par l'hypothese) est égale au quart de la surface d'un cylindre oblique, par le Lemme, puisque *VO* est perpendiculaire au plan du cercle *BIV*.

Donc la somme des *HL* multipliées par les mêmes arcs *II*, est égale au quart de la même surface

face. Donc la somme des *HL* multipliées par les petits arcs *LL*, est aussi égale à une surface d'un cylindre oblique proportionnée à l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose, si le point donné *X* est pris hors du plan, & élevé perpendiculairement sur le point *H*.

Car en prenant dans la perpendiculaire *VO* le point *K*, en sorte que *KO* quarré, plus deux fois le rectangle *KOV*, soit égal à *HX* quarré : il est visible que toutes les *XL* seront égales à toutes les *KI*, chacune à la sienne, puisque chaque *XL* quarré, ou *XH* quarré, plus *HL* quarré, sera égal à chaque *KI* quarré, ou *OI* quarré (qui est égal à *HL* quarré), plus *KO* quarré, plus deux fois *KOV*, qui sont pris égaux à *XH* quarré.

Donc la somme des *XL* est égale à la somme des *KI*, laquelle est égale à la surface d'un cylindre oblique par le même Lemme.

CONCLUSION.

De toutes lesquelles choses il s'ensuit que la
Fig. 43. somme (*Fig.* 43.) des représentantes *HM*, étant égale à la surface d'un cylindre oblique, elle sera par conséquent égale au rectangle qui a pour hauteur l'axe du cylindre oblique, & pour base la courbe de l'ellipse, engendrée dans la surface du cylindre oblique par le plan perpendiculaire à l'axe. Or la

même

même ſomme des repréſentantes eſt déja montrée égale à la courbe de la Roulette multipliée par le rayon de ſon cercle générateur. Donc la courbe de la Roulette multipliée par le rayon, eſt égale à la courbe d'une ellipſe multipliée par l'axe d'un cylindre oblique donné. Donc comme l'axe du cylindre donné, eſt au rayon donné, ainſi la courbe de la Roulette eſt à la courbe d'une ellipſe. Ce qu'il falloit démontrer.

En ſuivant cette méthode, on trouvera le calcul des deux axes de l'ellipſe, dont la courbe ſe compare à celle d'une Roulette donnée. Le voici tel que je le fis envoyer à beaucoup de perſonnes au commencement de Septembre 1658, en Angleterre, à Liege & ailleurs, & entre autres à M. de Roberval, à M. de Sluze, & quelque temps après à M. de Fermat.

Soit fait : comme la circonférence du cercle générateur, à cette même circonférence plus la baſe de la Roulette, ainſi le diametre du cercle à une autre droite ; cette droite ſoit le grand demi-axe d'une ellipſe. Soit fait : comme la circonférence plus la baſe, à la différence entre la circonférence & la baſe, ainſi le grand demi-axe, à l'autre demi-axe. La moitié de la courbe de l'ellipſe, qui aura ces deux demi-axes, ſera égale à la courbe de la Roulette entiere, & les parties aux parties.

On

On conclura auſſi de tout ce qui a été démontré, que deux Roulettes, l'une alongée, l'autre accourcie, ont leurs lignes courbes égales entre elles, s'il arrive de part & d'autre que la baſe de l'une ſoit égale à la circonférence du cercle générateur de l'autre.

Il me ſeroit aiſé de réduire cette méthode à la maniere des Anciens, & de donner une démonſtration pareille à celle que j'ai faite de l'égalité des lignes ſpirale & parabolique. Mais parce que cela ſeroit un peu plus long & inutile, je la laiſſe, quoique je l'aie toute prête; je me contente d'en avoir donné cet exemple de la ſpirale & de la parabole.

On voit auſſi, par toutes ces choſes, que plus la baſe de la Roulette approche d'être égale à la circonférence du cercle générateur, plus le petit axe de l'ellipſe qui lui eſt égale, devient petit à l'égard du grand axe : & que quand la baſe eſt égale à la circonférence, c'eſt-à-dire, quand la Roulette eſt ſimple, le petit axe de l'ellipſe eſt entiérement anéanti; & qu'alors la ligne courbe de l'ellipſe, laquelle eſt toute applatie, eſt la même choſe qu'une ligne droite, ſavoir, ſon grand axe : & delà vient qu'en ce cas la courbe de la Roulette eſt auſſi égale à une ligne droite. Ce fut pour cela que je fis mander à ceux à qui j'envoyai ce calcul, que les courbes des Roulettes étoient toujours, par leur nature, égales à des ellipſes; & que cette admirable

égalité

égalité de la courbe de la Roulette ſimple à une droite que M. Wren a trouvée, n'étoit, pour ainſi dire, qu'une égalité par accident, qui vient de ce qu'en ce cas l'ellipſe ſe trouve réduite à une droite. A quoi M. de Sluze ajouta cette belle remarque dans ſa réponſe du mois de Septembre dernier, qu'on devoit encore admirer ſur cela l'ordre de la nature, qui ne permet point qu'on trouve une droite égale à une courbe, qu'après qu'on a déja ſuppoſé l'égalité d'une droite à une courbe. Et qu'ainſi dans la Roulette ſimple, où l'on ſuppoſe que la baſe eſt égale à la circonférence du générateur, il arrive que la courbe de la Roulette eſt égale à une droite.



DE



DE L'ESCALIER, DES TRIANGLES CYLINDRIQUES, ET DE LA SPIRALE AUTOUR D'UN CÔNE.

LETTRE DE M. DETTONVILLE A M. DE SLUZE,

Chanoine de la Cathédrale de Liege.

Monsieur,

Je n'ai pas voulu qu'on vous envoyât mes Problêmes de la Roulette, sans que vous en reçussiez en même-temps d'autres que je vous ai promis depuis un si long temps, touchant la dimension & le centre de gravité de l'*Escalier* & des *Triangles cylindriques*. J'y ai joint aussi la résolution que j'ai faite d'un problême, où il s'agit de la dimension d'un solide formé par une spirale autour d'un cône. C'est une solution que j'aime, parce que j'y suis arrivé par le moyen de vos lignes en *perle*, & que tout ce qui vous regarde m'est cher. Cela me la

la rend plus considérable que sa difficulté, laquelle je ne puis désavouer, puisqu'elle avoit paru si grande à M. de Roberval : car il dit qu'il avoit résolu ce problême depuis long-temps; mais qu'il n'a jamais rien voulu en communiquer à qui que ce soit, voulant le réserver pour s'en servir en cas de nécessité, de même qu'il en tient encore secrets d'autres fort beaux pour le même dessein. Sur quoi je suis obligé de reconnoître la sincérité de sa maniere d'agir en ces rencontres : car aussitôt qu'il sut que je l'avois résolu, il déclara qu'il n'y prétendoit plus, & qu'il n'en feroit jamais rien paroître; par cette raison que n'en ayant jamais produit la solution, il devoit la quitter à celui qui l'avoit produite le premier. Je voudrois bien que tout le monde en usât de cette sorte, & qu'on ne vît point entre les Géometres cette humeur toute contraire de vouloir s'attribuer ce que d'autres ont déja produit, & qu'on ne trouve qu'après eux. Pour vous, Monsieur, vous en êtes bien éloigné, puisque vous ne voulez pas même avoir l'honneur de vos propres inventions : car je crois que pour faire savoir que vous avez trouvé, par exemple, cette parabole, qui est le lieu qui donne les dimensions des surfaces des solides de la Roulette autour de la base, il faudroit que ce fût moi qui le disse, aussibien que les merveilles de votre nouvelle Analyse, & tant d'autres choses que vous m'avez fait l'honneur

neur de me communiquer avec cette bonté que vous avez pour moi, qui m'engage d'être toute ma vie, &c.

POUR LA DIMENSION

Et le centre de gravité de l'Escalier.

Définition.

Fig. 27 & 46. SOit (*Fig.* 27 & 46.) l'arc de cercle quelconque *CQ* divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points *D*, d'où soient menés les rayons *DA*; & soit entendu le premier secteur *ASC*, élevé au-dessus du plan du secteur entier *AQC*, & parallélement à ce même plan; en sorte que chaque point du secteur *ASC* élevé réponde perpendiculairement au même secteur *ASC* dans le plan du cercle; c'est-à-dire, que le point *A* élevé soit dans la perpendiculaire au plan du cercle, mené du centre *A*; & de même le point *C* au-dessus du point *C*, &c. Et soit la distance d'entre le plan du cercle & le secteur *ASC* élevé, égale à un des petits arcs *DD*.

Soit le second secteur *ARC* élevé de même parallélement au plan de la base, & distant de ce même plan de deux petits arcs *DD*. Et soit le troisieme secteur élevé de même de la distance de trois petits arcs. Et ainsi toujours.

Le

Le ſolide, composé de ces ſecteurs, s'appellera *eſcalier:* & le rayon *A Q* s'appellera le *commencement* ou le *premier dégré;* & *A C* ſera le dernier dégré de l'eſcalier; & le ſecteur *A Q C* en ſera la baſe.

PROPOSITION PREMIERE.

Trouver la dimenſion d'un eſcalier donné, en ſuppoſant toujours la quadrature du cercle quand il le faut.

L'eſcalier eſt égal au quart du quarré de l'arc de ſa baſe multiplié par le rayon.

Cela eſt viſible, & démontré dans le Traité des Arcs, Propoſition III.

PROPOSITION II.

Trouver le centre de gravité d'un eſcalier donné.

Le centre de gravité de l'eſcalier eſt élevé au-deſſus de la baſe du tiers de l'arc de la baſe.

Cela eſt viſible de ſoi-même, & s'enſuit auſſi du Traité des Arcs, Propoſition IV.

Et ſi de ce centre de gravité on abaiſſe une perpendiculaire ſur la baſe, le point où elle tombera ſera donné, puiſque les diſtances, tant de la droite *A B*, que de la droite *A C* (*Fig.* 27 ou 32.) ſont données par les Propoſitions V & VI des Arcs. Fig. 27 ou 32.

Car la diſtance de la droite *A C* multipliant l'eſcalier, eſt égale à la ſomme des ſolides compris

de chaque ſecteur *ADC*, & de ſon bras ſur *AC*; laquelle ſomme eſt donnée par la Propoſition V des Arcs.

Et ſa diſtance de la droite *AB* multipliant de même l'eſcalier, eſt égale à la ſomme des ſolides compris de chaque ſecteur *ADC* & de ſon propre bras ſur *AB*; laquelle ſomme eſt donnée par la Propoſition VI.

Le calcul en eſt trop facile à faire, puiſqu'on connoît l'eſcalier & les ſommes de ces ſolides, par les Propoſitions V & VI. Et ſi on cherche, ſelon cette méthode, le centre de gravité de l'eſcalier, qui a pour baſe le quart de cercle, on trouvera qu'il eſt élevé au-deſſus du plan de la baſe de la douzieme partie de la circonférence : & que le point où tombe cette perpendiculaire ſur la baſe, eſt diſtant du premier dégré *AB*, d'une droite qui eſt au rayon, comme quatre fois lequarré du rayon, à trois fois le quarré de l'arc de 90 dégrés : & diſtant du dernier dégré *AC*, d'une droite qui eſt à ſa diſtance de *AB*, comme l'arc de 90 moins le rayon, eſt au rayon.



POUR

POUR LA DIMENSION
Et le centre de gravité des Triangles cylindriques.

DÉFINITION.

SI trois points quelconques ſont pris comme on voudra ſur la ſurface d'un cylindre droit, & qu'on les joigne par des lignes planes (leſquelles ſeront néceſſairement, ou des droites, ou des arcs de cercle, ou des portions d'ellipſe) : la portion de la ſurface cylindrique compriſe de ces trois lignes, s'appellera *Triangle cylindrique.*

Et ſi de deux points pris dans la circonférence de la baſe inférieure d'un cylindre droit, on mene les côtés du cylindre juſqu'à la baſe ſupérieure : la portion de la ſurface cylindrique, compriſe entre ces deux côtés & les arcs des deux baſes, s'appellera *Rectangle cylindrique.*

AVERTISSEMENT.

Je ne m'arrête pas à démontrer qu'en ſuppoſant la quadrature du cercle, on connoît le centre de gravité, & la dimenſion d'un rectangle cylindrique donné.

Et je ne m'arrête pas auſſi à démontrer qu'on aura la dimenſion & le centre de gravité d'un triangle cylindrique quelconque, ſi on connoît la dimen-

ſion & le centre de gravité d'une ſorte de triangle cylindrique, que j'appelle de la premiere eſpece;
Fig. 3. ſavoir, de ceux qui, comme *ZFB* (*Fig.* 3.), ſont composés de l'arc *BF* de la baſe, d'un côté *FZ* du cylindre, mené d'une des extrémités *F* de l'arc *BF*, & d'une portion d'ellipſe *ZB*, engendrée dans la ſurface cylindrique par le plan *ZBA*, paſſant par le rayon *BA*, mené de l'autre extrémité *B* de l'arc *BF*.

Car ſi on veut s'y appliquer, on verra incontinent qu'un triangle cylindrique quelconque, ſe diviſera toujours en pluſieurs petits triangles qui ſeront, ou la ſomme, ou la différence des triangles cylindriques de cette eſpece, ou de rectangles cylindriques : de la même ſorte qu'un triangle rectiligne quelconque ſe diviſera toujours en pluſieurs petits triangles, leſquels ſeront les ſommes ou les différences de triangles rectangles donnés; & qu'ainſi en connoiſſant la dimenſion & le centre de gravité des ſeuls triangles rectangles, on connoîtroit auſſi la dimenſion & le centre de gravité de toutes ſortes de triangles rectilignes donnés.

Ainſi on connoîtra la dimenſion & le centre de gravité de toutes ſortes de triangles cylindriques, ſi on connoît ces choſes, tant dans les rectangles cylindriques (où elles ſont connues d'elles-mêmes, comme il eſt déja dit), que dans les triangles cylindriques de la premiere eſpece, dans leſ-

quels

quels on va le résoudre dans la Proposition suivante.

PROPOSITION.

Étant donné un triangle cylindrique Z F B *de la premiere espece; en trouver la dimension & le centre de gravité?*

Cette proposition est déja résolue dans le Traité des Solides circulaires. Car ce triangle cylindrique n'est autre chose que la surface courbe de l'onglet du triligne circulaire *BFE*. Or dans ce Traité on a donné la dimension & le centre de gravité de la surface de son double onglet. Et il est visible que le centre de gravité de la surface d'un des onglets, est dans la perpendiculaire au plan du triligne, menée du centre de gravité de la surface du double onglet : de sorte qu'il ne reste qu'à trouver la longueur de cette perpendiculaire; laquelle est aisée, puisque la surface de l'onglet multipliée par cette perpendiculaire, est égale à la moitié de la somme des quarrés des sinus de l'arc *FB* (quand le plan qui retranche l'onglet est incliné de 45 dégrés : & quand on l'a dans cette inclinaison, on l'a aussi dans toutes les autres, puisqu'elle est toujours en même raison à la hauteur *ZF*). Or la moitié de la somme des quarrés de ces sinus est connue, & égale (par le Traité des Sinus, Proposition II) à la moitié de l'espace *BFE*, multiplié par le rayon *BA*.

On suppose ici que dans la *Figure* 3, *ABC* est un quart de cercle, dont *A* est le centre; & que la surface *BFCYZB* est une portion de la surface du cylindre droit, retranchée par le plan *YZBA*, passant par le rayon *BA*, & formant dans la surface cylindrique la portion d'ellipse *BZY*.

DIMENSION

D'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône.

Soit un cercle donné *ABCD*, dont *A* soit le centre, & *AB* un demi-diametre; soit *BG* perpendiculaire au plan du cercle de quelque grandeur que ce soit, par exemple, égale à *AB*, & soit entendu, en un même temps, la ligne *AB*, se tourner uniformément à l'entour du centre *A*, & la ligne *BG*, se porter en même-temps & par un mouvement uniforme le long du demi-diametre *BA*; & soit encore entendu en même-temps le point *B* monter uniformément vers *G*; en sorte qu'en un même temps le point *B* arrive à l'extrémité de la ligne *BG*, la ligne *BG* au centre *A*, & le demi-diametre *AB* au point *B* d'où il étoit parti.

Par ces mouvements, la ligne *BG* décrira une spirale *BIHA* dans le plan du cercle; & le point *B*, en montant, décrira une espece de spirale en l'air,

l'air, ou autour d'un cône *BFE*, qui ſe terminera au point *E*, d'où la perpendiculaire *AE* eſt égale à *BG*.

On demande la proportion de la ſphere, dont le cercle donné eſt un grand cercle, avec le ſolide ſpiral décrit par ces mouvements, & terminé par quatre ſurfaces; ſavoir, la ſpirale *BHA* décrite dans le plan du cercle, la portion de ſurface conique bornée par la droite *BE* & par l'eſpece de ſpirale *BFE*, le triangle rectiligne *BAE*, & la ſurface cylindracée décrite par *BG* portée autour de la ſpirale *BHA*.

SOLUTION.

Soit coupée *BA* en un nombre indéfini de parties égales aux points *O*: & ſoit le point *T* celui du milieu, d'où ſoit mené le demi-cercle *TH'*, qui, comme il eſt aiſé de l'entendre, coupera le diametre prolongé en *H* au même point où arrive la ſpiralé.

Soit ſur ce demi-cercle élevée la ſurface cylindrique *TPFH*, qui coupe les ſurfaces qui bornent le ſolide, & y donnent pour communes ſections *TPFH*, qui ſera composée de quatre lignes; ſavoir, la ligne *TP*, qui ſe trouvera dans le plan *BAE*, la ligne *FH* dans la ſurface cylindracée égale à *TP*, le demi-cercle *PF* dans la ſurface ſupérieure, & le demi-cercle de la baſe *TH* égal au précédent *PF*, comme tout cela eſt évident; &

ainſi la figure *TPFH* ſera un rectangle cylindrique.

Soit maintenant d'un des points *O* mené l'arc *OI* à l'entour du centre *A*, qui coupe la ſpirale en *I*, & ſoit élevé de même le rectangle cylindrique *OYSI*: je dis, & cela ſera incontinent démontré, que ce rectangle cylindrique *OYSI* ſera au premier *PTHF*, comme *BO* quarré en *OA*, à *BT* quarré en *TA*.

Ce qui étant toujours véritable en quelque lieu que ſoit le point *O*: il s'enſuit que tous les rectangles cylindriques enſemble, c'eſt-à-dire, le ſolide propoſé, ſera à celui du milieu *PTHF* pris autant de fois, c'eſt-à-dire, au demi-cylindre qui a le cercle donné pour baſe, & pour hauteur *TP*, qui eſt la moitié du demi-diametre, comme tous les *BO* quarré en *OA* enſemble, à *BT* quarré en *TA*, ou à *BT* cube pris autant de fois, c'eſt-à-dire, comme la perle du troiſieme ordre au rectangle de l'axe & de l'ordonnée du milieu : laquelle raiſon M. de Sluze a donnée, non-ſeulement dans la perle du troiſieme ordre, mais encore dans celle de tous les ordres, où cette raiſon eſt toujours comme nombre donné à nombre donné.

Donc le ſolide propoſé eſt au demi-cylindre du cercle donné & de la hauteur *TP*, en raiſon donnée ; donc il eſt auſſi en raiſon donnée au cylindre entier de même baſe & de la hauteur quadruple, ſavoir, du diametre entier *BD*, & par conſéquent

à

à la ſphere, qui eſt les deux tiers du cylindre. Ce qu'il falloit démontrer.

Or que le rectangle cylindrique *YOIS* ſoit au rectangle cylindrique *PTHF*, comme *BO* quarré en *OA*, à *BT* quarré en *TA*: cela ſe prouve ainſi.

Je dis, premiérement, que l'arc *OI* eſt à l'arc *TH*, comme le rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*; car les arcs *OI*, *TH* ſont en raiſon compoſée des demi-diametres *AO*, *AT*, & des angles, ou des arcs *BC*, *BCD*, qui ſont, par la nature de la ſpirale, comme *CI* ou *BO*, à *DH* ou *BT*; donc ces arcs ſont en raiſon compoſée de *BO* à *BT* & de *OA* à *TA*, c'eſt-à-dire, comme le rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*.

Venons maintenant aux rectangles cylindriques *YOIS*, *PTHF*: il eſt viſible qu'ils ſont en raiſon compoſée des hauteurs & des baſes, c'eſt-à-dire, en raiſon compoſée de *OY* à *TP*, ou *BO* à *BT*, & de l'arc *OI* à l'arc *TH*, c'eſt-à-dire, comme on l'a vu, du rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*: mais la raiſon compoſée de *BO* à *BT*, & du rectangle *BO*, *OA* au rectangle *BT*, *TA*, eſt la même que la raiſon de *BO* quarré en *OA* à *BT* quarré en *TA*. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

Les ſolides des autres ſpirales des ordres ſupérieurs, ſe trouveront de même par le moyen des lignes en perle des ordres ſupérieurs.

ÉGALITÉ



ÉGALITÉ DES LIGNES SPIRALE ET PARABOLIQUE.

LETTRE DE M. DETTONVILLE A M. A. D. D. S.

MONSIEUR,

J'AI reçu la Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, avec le petit Traité de Géométrie qu'il vous a plu m'envoyer; & je prends pour un effet de votre civilité l'ordre que vous me donnez de l'examiner; car vous pouviez le faire facilement vous-même, puisque ce qui est une étude pour les autres, n'est qu'un divertissement pour vous. Mais puisque vous voulez en savoir mon sentiment, je vous dirai, Monsieur, que l'Auteur y touche une difficulté où beaucoup d'autres ont heurté : & c'est une chose étrange de voir qu'en une matiere de Géométrie il se rencontre tant de contestations. Il y a environ quinze ans que M. Hobbes crut que la ligne courbe d'une parabole donnée étoit égale à

à une ligne droite donnée. M. de Roberval ensuite dit qu'elle étoit égale à la ligne courbe d'une spirale donnée; mais sans en donner de démonstration autrement que par les mouvements, dont on voit quelque chose dans le Livre des Hydrauliques du R. P. Mersenne : & comme cette maniere de démontrer n'est pas absolument convaincante, d'autres Géometres crurent qu'il s'étoit trompé, & publierent que cette ligne parabolique étoit égale à la demi-circonférence d'un cercle donné: le Livre que vous m'envoyez maintenant, soutient de nouveau la même chose. Cette diversité d'avis m'ayant étonné, je voulus reconnoître lequel étoit le véritable; car quelque nombre de Géometres qu'il y eût contre M. de Roberval, je n'en conclus rien contre lui : & au contraire si on jugeoit de la Géométrie par ces sortes de conjectures, la connoissance que j'ai de lui m'auroit fait pencher de son côté, le voyant persister dans son sentiment; mais comme ce n'est pas par-là qu'on doit en juger, je résolus d'examiner moi-même si la ligne à laquelle on peut comparer la ligne parabolique donnée, est une ligne droite ou une spirale, ou une circonférence de cercle : c'est ce que je voulus chercher, comme si personne n'y avoit pensé : & sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements, ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des Anciens, afin que la chose pût

être

être désormais ferme & sans dispute. Je l'ai donc fait, & j'ai trouvé que M. de Roberval avoit eu raison, & que la ligne parabolique & la spirale sont égales l'une à l'autre : c'est ce que vous verrez. La démonstration est entiere & exactement accomplie, & pourra vous plaire d'autant plus qu'elle est la seule de cette espece : aucune autre n'ayant encore paru, à la maniere des Anciens, de la comparaison de deux lignes de différente nature. Ainsi je puis dire, avec certitude, que la ligne parabolique est égale à la spirale, & je m'assure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions. Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, & que ce vous soit au moins une marque du desir que j'ai de vous satisfaire & de vous témoigner que je suis de tout mon cœur, &c.

De Paris, ce 10 *Décembre* 1658.



PROPRIÉTÉS

PROPRIÉTÉS DU CERCLE.

I.

SI la touchante EV (Figure 35.) *eſt perpendiculaire au rayon* AE, *& que l'arc* EB *étant pris moindre qu'un quart de cercle, on incline* BV, *faiſant avec la touchante l'angle* BVE *aigu : je dis que toute la portion* BV *ſera hors du cercle.* Fig. 35.

Car en menant la touchante *BZ*, elle fera angle obtus avec *EZ* (puiſque l'arc *BE* eſt moindre qu'un quart de cercle). Donc l'angle *BZE* ſera plus grand que l'angle *BVE* : donc le point *Z* eſt entre les points *E*, *V* : donc l'angle *ABV* eſt obtus ; donc la portion *BV* ſera hors du cercle. Ce qu'il falloit démontrer.

II.

Si d'une extrémité du diametre (Fig. 36.) *eſt menée la touchante* SN, *& de l'autre extrémité* G *la droite* GN, *qui la coupe en* N, *& le cercle en* X : *je dis que la droite* SN *eſt plus grande que l'arc* SX. Fig. 36.

Car en menant la touchante *XR*, les deux touchantes *XR*, *RS* ſeront égales, tant entre elles, qu'à *RN* (à cauſe que l'angle *SXN* eſt droit) : donc *SN* eſt égale à *SR*, plus *RX*, qui ſont enſemble

ſemble plus grandes que l'arc *S X*. Ce qu'il falloit démontrer.

III.

Fig. 37. *Si la touchante* SL (Fig. 37.) *étant perpendiculaire au diametre* SG, *eſt égale à l'arc* SX, *moindre qu'un quart de cercle : je dis qu'en menant les droites* SX, XL, *les trois angles du triangle* XSL *ſont aigus.*

Car en menant la droite *GXN*, l'angle *XSL* l'eſt viſiblement, puiſqu'il eſt égal à l'angle *G*; l'angle *SXL* l'eſt auſſi, puiſqu'il diviſe l'angle droit *SXN*, par la précédente; & l'angle *SLX* l'eſt, à plus forte raiſon, le côté *SL* qui eſt égal à l'arc *SX*, étant plus grand que la droite *SX*. Ce qu'il falloit démontrer.

IV.

Fig. 38. *Si la touchante* S8 (Fig. 38.) *étant priſe plus grande que le diametre* SG, *auquel elle eſt perpendiculaire, l'on mene au centre la droite* 8T, *coupant le cercle au point* Y : *je dis que quelque point qu'on prenne dans l'arc* SX, *comme* X, *dont on mene* SX *coupant* T8 *en* Q, *la portion* 8Q *eſt plus grande que l'arc* SX.

Car en menant 8*Z* parallele à *ST*, les triangles rectangles *Z8S*, *NGS* ſeront ſemblables (à cauſe de l'égalité des angles *G* & 8*SZ*); donc les côtés ſeront proportionnels : mais *GS* eſt poſée moindre

dre que *S* 8 ; donc *S N* est aussi moindre que *Z* 8 : mais *Z* 8 est moindre que 8 *Q* (puisque *S T* est moindre que *T Q*, le point *Q* étant hors du cercle) ; donc *S N* est moindre que 8 *Q* : mais l'arc *S X* est moindre que *S N* (par ce qui a été démontré) ; donc à plus forte raison l'arc *S X* est moindre que 8 *Q*. Ce qu'il falloit démontrer.

V.

Si l'arc de cercle EB (Fig. 39.) *moindre qu'un quart de cercle, est égal à la touchante* EV, *perpendiculaire au rayon* AE : *je dis que l'angle* EAV *sera plus grand que la moitié de l'angle* EAB. Fig. 39

Car soit menée la droite *A Z*, qui coupe l'angle *E A B* en deux parties égales, & la touchante *E V* au point *Z* : il est visible que la portion *E Z* est moindre que la corde *E B* (puisque l'angle *E Z B* est obtus, l'arc étant moindre qu'un quart de cercle) ; mais la corde *E B* est moindre que l'arc *E B*, & partant moindre que *E V* : donc à plus forte raison *E Z* est moindre que *E V* : donc l'angle *E A Z* est moindre que l'angle *E A V*. Ce qu'il falloit démontrer.



PROPRIÉTÉS

PROPRIÉTÉS DE LA SPIRALE.

Fig. 40. SI le rayon *A B* (*Fig.* 40.) qui est le commencement de la spirale de la premiere révolution *BCDXA*, est divisé en tant de portions égales qu'on voudra aux points *A*, *Y*, 4, 3, *B* : & les arcs menés de ces points autour du centre commun *A*, coupant la spirale aux points *C*, *D*, *X*, &c. :

Je suppose qu'on sache toutes les propriétés suivantes :

1°. Que l'arc quelconque 3 *C* est à l'arc 4 *D*, comme le rectangle 8 3 in 3 *A* au rectangle *B* 4 in 4 *A*.

2°. Que les rayons *A B*, *A E*, *A* 8, &c. font tous les angles égaux entre eux, & divisent les arcs en tant de portions égales entre elles que le rayon *A B* : & qu'ainsi telle partie que la premiere portion *B* 3, est du rayon, telle partie l'arc *B E* l'est de sa circonférence, & l'arc *C F* ou 3 *C* de la sienne : & telle partie est encore l'angle *B A E* de quatre angles droits.

3°. Que le rayon entier *B A* est à une portion quelconque *A* 3, comme la circonférence entiere *B E B*, à l'arc *E* 8 *B*, qui contient autant de portions égales du cercle, que *A* 3 contient de portions égales du rayon, ou comme telle autre circonférence qu'on voudra 3 *C* 3, à l'arc correspondant *C F* 3.

4°. Que

4°. Que tous les arcs *BE*, 3*C*, 4*S*, compris entre deux rayons prochains *AB*, *AE*, qui comprennent un des arcs égaux, ſont tous en proportion arithmétique : & que le moindre de ces arcs *Y*9, qui part du point *Y* le plus proche du centre, eſt égal à la différence dont chacun des autres differe de ſon voiſin : & qu'ainſi ſi le premier eſt 2, le ſecond eſt 4, le troiſieme eſt 6 : & ainſi toujours en ſuivant les nombres pairs.

5°. Que ce moindre arc *Y*9, pris autant de fois que l'arc *BE* eſt dans ſa circonférence, eſt égal au plus grand arc *BE*.

6°. Que ce moindre arc *Y*9 eſt égal au dernier arc extérieur de la ſpirale *XY*.

7°. Que l'angle aigu que fait la touchante à un point quelconque de la ſpirale *C* avec ſon rayon *AC*, ſe trouvera en faiſant un triangle rectangle, dont la baſe ſoit ce rayon *AC*, & la hauteur ſoit égale à l'arc extérieur *CF*3. Car alors l'angle de la touchante avec ſon rayon ſera égal à l'angle que l'hypothénuſe d'un tel triangle rectangle fait avec ſa baſe.

CONSÉQUENCES.

8°. Que la touchante de la ſpirale au point *A* eſt la même que le rayon *AB*, & que les touchantes aux autres points font toujours avec les rayons menés de ces points des angles d'autant plus grands que le point d'attouchement eſt plus

proche de *B*, parce que la raiſon du rayon à l'arc extérieur en eſt d'autant moindre : y ayant moindre raiſon de *AC* à l'arc *CF* 3, que de *AD* à l'arc *DH* 4, puiſqu'en changeant & en renverſant, il y a plus grande raiſon de l'arc *CF* 3 à l'arc *DH* 4, que de *CA* à *AD* ou *AS*, c'eſt-à-dire, que du même arc *CF* 3 à *SD* 4.

9°. Qu'ainſi ſi on mene des touchantes de tous les points où la ſpirale eſt coupée par les rayons qui diviſent la circonférence en arcs égaux, le plus grand angle que ces touchantes faſſent avec les rayons, eſt celui de la touchante menée du point *B*, où le premier rayon coupe la ſpirale, lequel eſt égal à celui d'une hypothénuſe avec ſa baſe, la baſe étant à la hauteur, comme le rayon à la circonférence. Et le moindre de ces angles eſt celui de la touchante menée du point *X*, où le dernier rayon coupe la ſpirale.

10°. Que le moindre des angles des touchantes avec leurs rayons, eſt plus grand que la moitié de l'angle compris par deux rayons prochains qui enferment l'un des arcs égaux ; ſavoir, la moitié de l'angle *BAE*.

Car l'angle de la touchante au point *X* eſt celui de l'hypothénuſe d'un triangle avec ſa baſe (la baſe étant à la hauteur, comme *AX*, à l'arc extérieur *XY*, ou comme *AY*, à l'arc *Y* 9) ; donc en faiſant la perpendiculaire *YG* égale à l'arc *Y* 9, l'angle

GAY

G A Y ſera celui de la touchante au point *X* avec ſon rayon. Or cet angle *G A Y* eſt plus grand que la moitié de l'angle *Y A 9* ou *B A E* (par la derniere propriété du cercle) ; & menant la touchante *E V* égale à l'arc *E B*, & menant auſſi l'hypothénuſe *A V*, l'angle *E A V* ſera égal à cet angle, qui eſt le moindre de tous, de la derniere touchante au point *X* avec ſon rayon : mais l'angle *E A V* eſt plus grand que la moitié de l'angle *B A E*, par ce qui a été démontré ; donc l'angle de la touchante au point *X* eſt auſſi toujours plus grand que la moitié de l'angle *B A E*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE.

SOIT A B (Fig. 42.) *la touchante au ſommet d'une parabole, diviſée en tant de parties égales qu'on voudra aux points* 3, 4, Y, *d'où ſoient menés les diametres ou les paralleles à l'axe, coupant la parabole en* Q, 7, L. *Et de ces points ſoient menées les touchantes juſqu'aux diametres prochains* Q K, 7 5, L T, &c. : *je dis que toutes les portions des diametres* P K, Q 5, 7 T, L Y, &c. *compriſes entre les touchantes & la parabole, ſont égales entre elles.* Fig. 42.

Car chacune, comme *P K*, par exemple, ſera montrée égale à la premiere *Y L*, en cette ſorte.

Soit prolongée *K Q* (puiſque *P K* eſt priſe en

 exemple)

exemple) jusques à l'axe au point *S*, & menée l'ordonnée *QM*.

Donc, par la nature de la parabole, puisque les deux diametres *SA*, *KP*, sont coupés par la touchante *SK*, il arrivera que

SA est à *PK* comme *QS* quarré à *QK* quarré,
ou comme 3 *A* quarré à 3 *B* quarré,
ou comme 3 *A* quarré à *AY* quarré,
ou comme 3 Q
ou *MA* à *LY*

Mais, à cause de la touchante, *SA* est égale à *MA*; donc *PK* est égale à *LY*. Ce qu'il falloit démontrer.

Je suppose qu'on sache cette autre propriété de la parabole:

Que si on mene les ordonnées, par tous ces mêmes points, *PR*, *QM*, 7 *G*, *LH*; toutes les portions de l'axe comprises entre ces ordonnées, savoir *RM*, *MG*, *GH*, *HA*, seront en proportion arithmétique: & que leur différence sera double de la premiere *HA* (il faut dire le même des droites qui leur sont égales *PZ*, Q2, 7*O*, *LY*). De sorte que si la derniere *LY* est 1, la seconde est 3, la troisieme 5, &c.; ainsi toujours par les nombres impairs.

AVERTISSEMENT.

Je démontre l'égalité de la ligne spirale avec la parabolique

parabolique en inſcrivant & circonſcrivant, tant à la ſpirale, qu'à la parabole, des figures deſquelles je conſidere ſeulement le tour, ou la ſomme des côtés.

La maniere dont je me ſers pour inſcrire & circonſcrire ces figures eſt telle.

Pour inſcrire une figure en la parabole.

Soit (Fig. 40.) *une parabole dont* A R *ſoit l'axe*, R P *la baſe*, A B *la touchante au ſommet*, *diviſée en tant de parties égales qu'on voudra*, *aux points* 3, 4, *&c. d'où ſoient menées les paralleles à l'axe*, *qui coupent la parabole aux points* 7, Q, P, *&c. Les accommodées* P Q, Q 7, *&c. ſont une figure inſcrite en la parabole*, *& c'eſt celle de laquelle je me ſers*, *dont le tour eſt viſiblement moindre que celui de la parabole*, *puiſque*, *par la nature de la ligne droite*, *chaque accommodée eſt moindre que la portion de la parabole qu'elle ſous-tend.* Fig. 40.

Avertissement.

Je ſuppoſe le principe d'Archimede : *que ſi deux lignes ſur le même plan ont les extrémités communes*, *& ſont courbes vers la même part*, *celle qui eſt contenue ſera moindre que celle qui la contient.*

Pour circonſcrire une figure à la parabole.

Fig. 40. *SOIENT dans la même* (Fig. 40.) *des points* Q, 7, *&c. menées des touchantes* QK, 7 5, &c. *qui coupent les diametres prochains en* K, 5, &c. *la figure* PKQ57, *&c. compoſée des touchantes* KQ, 57, *&c. & des portions extérieures des diametres* PK, Q5, *&c. forme une figure circonſcrite à la parabole, qui eſt celle dont je me ſers, & dont le tour eſt viſiblement plus grand que celui de la parabole, puiſque les deux quelconques côtés liés* KK, *plus* PQ (*dont l'un eſt la touchante, & l'autre la portion extérieure du diametre*) *ſont plus grands que la portion de la parabole qu'ils enferment, puiſqu'ils ont les extrémités* P, Q *communes, & que la parabole eſt courbe vers la même part.*

CONSÉQUENCE.

De cette deſcription & de la propriété que nous avons démontrée de la parabole, il s'enſuit, qu'en toute figure circonſcrite à la parabole en la maniere qui eſt ici marquée, les portions des paralleles à l'axe *PK*, Q5, *LY*, ſont toutes égales entre elles.

Pour inſcrire une figure en la ſpirale.

SOIT le rayon AB *le commencement d'une ſpirale de la premiere révolution, diviſé en parties égales*

les aux points 3, 4, &c., d'où ſoient menés les cercles 3 C, 4 D C, &c. concentriques au grand, qui coupent la ſpirale en C, D, &c. Les accommodées B C, C D, &c. formeront une figure inſcrite en la ſpirale, qui eſt celle dont je me ſers, & dont le tour eſt viſiblement moindre que celui de la ſpirale, puiſque par la nature de la ligne droite, chaque accommodée eſt moindre que la portion de la ſpirale qu'elle ſous-tend.

Pour circonſcrire une figure à la ſpirale.

SOIENT des points C, D, &c. menées les touchantes de la ſpirale, juſques aux cercles prochains qu'elles coupent en M, N, &c. la figure 8 M C N D, compoſée des portions extérieures des arcs B M, C N, &c. & des touchantes M C, N D, &c., qui ſera circonſcrite à la ſpirale, eſt celle dont je me ſers, & dont le tour eſt viſiblement plus grand que celui de la ſpirale, puiſque deux quelconques côtés liés B M, plus M C (dont l'un eſt un arc de cercle extérieur, & l'autre la touchante de la ſpirale) ſont plus grands que la portion de la ſpirale qu'ils enferment, ces figures étant par-tout courbes vers la même part, & ayant les extrémités B, C communes.

DÉFINITIONS.

Soit dans la même (*Fig.* 40.) la droite *A B* le commencement d'une ſpirale de la premiere révo- Fig. 40.

 lution,

lution ; & ſoit la même droite *A B* la touchante au ſommet d'une parabole, dont l'axe *A R* ſoit égal à la moitié de la circonférence du grand cercle *B E B*, & la baſe *R P*, égale au rayon *A B*. Cette parabole & cette ſpirale ayant cette condition, ſeront dites *correſpondantes*.

Soit maintenant diviſée *A B* en tant de portions égales qu'on voudra aux points 3, 4, *Y*, &c. d'où ſoient menés autant de cercles ayant le centre commun en *A*, qui coupent la ſpirale en *C*, *D*, &c. que de lignes droites paralleles à l'axe, qui coupent la parabole *Q*, 7, &c. (Donc chaque point du rayon, comme 3, donnera un point dans la parabole par la parallele à l'axe 3 *Q*, & un point dans la ſpirale par l'arc de cercle 3 *C*). Ces points ſont dits *correſpondants* ; & la portion de la parabole entre *Q* & *P* *correſpond* à la portion de la ſpirale entre *B* & *C* ; & les inſcrites *C B*, *P Q*, ſont *correſpondantes* : & par la même raiſon les inſcrites *D C*, *Q* 7.

Et ſi de ces points *Q*, 7, &c. ſont menées les ordonnées *Q Z*, 7 2, &c. la portion *Q Z* *correſpond* à la portion *C E*, & 7 2 à *D F*, &c. Et la premiere portion *P Z* (égale à la premiere portion de l'axe, compriſe entre les deux premieres ordonnées) *correſpond* à l'arc *B E* du premier cercle, compris entre les deux premiers rayons : & la ſeconde portion *Q* 2, compriſe entre la ſeconde & la troiſieme,

me, *correſpond* à l'arc du ſecond cercle *CF* compris entre le ſecond & le troiſieme rayon; & ainſi des autres. Et le triangle rectangle *PQZ correſpond* au triligne *BEC*, fait de l'arc *BE* & des droites *BCCE*: & de même le triangle Q72 *correſpond* au triligne *CFDC*; & les touchantes de la parabole & de la ſpirale *QK*, *CM* ſont *correſpondantes*, étant menées des points correſpondants Q, *C*; & la portion *PK* à l'arc *BM*, &c.

RAPPORTS entre la parabole & la ſpirale, qui ont la condition ſuppoſée pour être dites correſpondantes.

I.

SI une parabole & une ſpirale ſont en la condition ſuppoſée : je dis que quelque point qu'on prenne dans la touchante AB, *comme* 3, *la portion du diametre extérieur, ou bien* 3 Q, *compriſe entre le point* 3 *& la parabole, eſt égale à la moitié de l'arc* 3 FC, *paſſant par le même point* 3, *& extérieur à la ſpirale.*

Car, par la nature de la ſpirale, la circonférence entiere *BEB* eſt à l'arc extérieur *CF*3, comme *BA* quarré à *A*3 quarré (puiſque l'entiere *BEB* eſt à l'arc *CF*3, en raiſon compoſée de l'entiere *BEB* à l'entiere 3*C*3, ou de *BST* à *A*3, & de l'entiere

l'entiere 3 *C* 3 à l'arc *CF* 3, qui est encore comme *BA* à *A* 3). Donc leurs moitiés sont aussi en même raison; & partant *BP*, qui est la moitié de la circonférence *BEB*, est à la moitié de l'arc *CF* 3, comme *BA* quarré à *A* 3 quarré, ou, par la nature de la parabole, comme la même *BP* à 3 Q. Donc 3 *Q* est égale à la moitié de l'arc *CF* 3. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit que le moindre des arcs *Y* 9, compris entre deux rayons prochains, est double du dernier diametre extérieur *YL*.

Car ce moindre arc *Y* 9 est égal au dernier extérieur *YX*, lequel est double de sa portion *YL* par cette proposition.

II.

Les mêmes choses étant posées : je dis que les angles que les touchantes de la spirale font avec leurs rayons, sont égaux aux angles que les touchantes de la parabole font avec leurs ordonnées aux points correspondants : ou, ce qui est le même, que quelque point qu'on prenne dans la spirale, comme C, *son correspondant* Q *dans la parabole, l'angle* ECM *du rayon avec la touchante, sera égal à l'angle* ZQK *de l'ordonnée* ZQ *avec la touchante* QK.

Car la portion de la touchante, comprise entre le point Q & l'axe, est l'hypothénuse d'un triangle

gle rectangle, dont la base est l'ordonnée $Q\,6$ (égale à $A\,3$ ou AC), & la hauteur est double de $A\,6$ ou de $Q\,3$, & partant égale à l'arc extérieur $CF\,3$ (qui est double de la même $Q\,3$) : mais par la Propriété VII de la spirale, l'angle ECM de la touchante au point C avec son rayon, est aussi égal à l'angle de l'hypothénuse avec la base qui soit à la hauteur, comme le même rayon AC au même arc extérieur $CF\,3$. Donc l'angle ECM est égal à l'angle ZQK. Ce qu'il falloit démontrer.

III.

Les mêmes choses étant posées : je dis que chacun des arcs BE, CF, *&c.* (*qui sont les mêmes que les arcs* BE, 3 C, 45, *&c. compris entre les deux rayons prochains*) *diminué de la moitié du dernier* Y 9, *est égal à chacune des portions de l'axe qui lui correspond*, PZ, Q 2, *&c.* (*& qui sont les mêmes que les portions de l'axe entre les ordonnées*).

Car toutes ces portions sont entre elles comme les nombres impairs; & tous les arcs BE, CF ou $3\,C$, sont entre eux comme les nombres pairs : mais le plus petit des arcs $Y\,9$ est double de la premiere portion YL, par le Corollaire du rapport premier; donc si YL est 1, l'arc sera 2 : & partant toutes les portions $P\,2$, $Q\,2$, &c. étant 1, 3, 5, 7, 9, &c., & les arcs BE, $3\,C$, &c. étant 2, 4, 6, 8, &c. : il s'ensuit que chacun differe

fere de ſon correſpondant de l'unité, c'eſt-à-dire, de la moitié de *Y* 9. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME.

Si une grandeur A *eſt moindre que quatre autres enſemble* B, C, D, E : *je dis que la différence entre la premiere* A *& deux quelconques des autres, comme* B, *plus* C, *ſera moindre que les quatre enſemble* B, C, D, E.

Cela eſt manifeſte.

PROBLÊME.

ÉTANT donnée une parabole & une ſpirale en la condition ſuppoſée: inſcrire & circonſcrire en l'une & en l'autre des Figures, en ſorte que le tour de l'inſcrite en la parabole ne differe du tour de l'inſcrite en la ſpirale, que d'une ligne moindre qu'une quelconque donnée Z; *& de même pour les circonſcrites.*

Fig. 41. Soit pris dans une figure ſéparée (*Fig.* 41.) le rayon *ts*, plus grand que le rayon *AB*; & ayant élevé *s* 8 perpendiculairement égale à la circonférence, dont *ts* eſt le rayon, ſoit menée 8 *t*, coupant ſon cercle en *y* : ſoit maintenant de 8 *Y* retranchée 8 *a* de telle grandeur qu'on voudra, pourvu qu'elle ſoit moindre qu'un tiers de *Z*; & ayant mené *as* coupant l'arc en *d*, ſoit diviſée la circonférence en tant

d'arcs

d'arcs égaux qu'on voudra, pourvu que chacun, comme $s x$, ſoit moindre que l'arc $s d$.

Je dis qu'en diviſant le cercle $B E B$ en autant d'arcs égaux, & le rayon $A B$ de même en autant de portions égales aux points 3, 4, &c., d'où ſoient menés à l'ordinaire des cercles & des paralleles à l'axe, qui coupant la ſpirale & la parabole, y donneront les points pour inſcrire & circonſcrire des figures en la maniere qui a été marquée : ces figures ſatisferont au Problême.

I PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

Que la différence entre les deux inſcrites eſt moindre que Z.

POUR prouver que la ſomme des côtés de l'inſcrite en la parabole differe des côtés de l'inſcrite en la ſpirale d'une ligne moindre que Z, on fera voir que chaque côté de l'une ne differe de ſon correſpondant que d'une ligne, qui, priſe autant de fois qu'il y a de côtés, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence, eſt moindre que Z. D'où il s'enſuit néceſſairement que toutes ces différences enſemble, priſes chacune une fois, ſont moindres que Z.

Je dis donc que la différence entre $B C$, par exemple, & ſon correſpondant $P Q$, priſe autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, eſt moindre que Z.

Car

Car en menant du point *E* (puiſque *BC* eſt priſe en exemple) la perpendiculaire *EV* égale à l'arc *EB*, & retranchant *EO* égale à *ZP*, (& qu'ainſi l'excès *VO* ſoit égal au demi-arc *Y*9) : il eſt manifeſte que *CO* ſera égale à *PQ*, *CE* étant égale à *QZ*; donc il ſuffira de montrer que la différence entre *CO* & *CB*, priſe autant de fois qu'il y a d'arcs, eſt moindre que *Z*. Mais cette différence entre *BC* & *CO* eſt moindre que la ſomme des deux droites *BV*, *VO* (car la différence des côtés *BC*, *CO* eſt moindre que la baſe *BO*, laquelle *BO* eſt moindre que les côtés enſemble *BV*, *VO*). Donc il ſuffira *à fortiori* de montrer que les deux côtés enſemble *BV*, *VO*, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, ſont moindres que *Z* : & cela eſt aiſé, puiſque chacun, pris autant de fois qu'il y a d'arcs, eſt moindre qu'un demi & même qu'un tiers de *Z*.

Car cela eſt viſible de *VO*, puiſqu'étant égale à un demi-*Y*9, il eſt clair qu'étant priſe autant de fois qu'il y a d'arcs, elle ne ſera égale qu'au demi-arc *BE*, & partant bien moindre qu'un demi-*Z*, l'arc *BE* étant moindre qu'un demi-*Z*, puiſqu'il eſt moindre que l'arc *sx* de la figure ſéparée (le rayon *AB* étant moindre que *ts*), lequel arc *sx* eſt moindre que 8 Q par le Lemme IV des ſpirales, & *à fortiori*, que 8 *A*, qui a été pris moindre qu'un tiers de *Z*.

Il

Il ne reste donc qu'à démontrer la même chose de *BV*, & cela sera aisé en cette sorte :

Soit prise dans la figure séparée la portion *sl* égale à l'arc *sx*, & soit menée *le* parallele à *t* 8, & *tz* parallele à *lx*. Donc puisque l'angle *lxs* est aigu par la troisieme propriété du cercle, l'angle *tzs* sera obtus, & partant *tz* sera moindre que *ts* ou *ty*, & *à fortiori* que *tq* : donc aussi, à cause des paralleles, *lx* sera moindre que *le* : mais *le* est à 8 *q*, comme *ls* à *s* 8 : donc *lx* a moindre raison à 8 *q*, que *ls* à *s* 8, ou que l'arc *lx* à sa circonférence : donc *lx* prise autant de fois que l'arc *sx* est en sa circonférence, ou l'arc *BE* dans la sienne, est moindre que 8 *q*, & *à fortiori* qu'un tiers de *Z*.

Donc *BV à fortiori* prise autant de fois, sera moindre qu'un tiers de *Z*, puisqu'elle est moindre que *lx*, le rayon *AB* étant moindre que le rayon *ts*, & toutes choses proportionnelles. Ce qu'il falloit démontrer.

II PARTIE DE LA DÉMONSTRATION.

Que la différence entre les deux circonscrites est moindre que Z.

POUR prouver que la somme des côtés de la circonscrite à la spirale, ne differe de celle des côtés de la circonscrite à la parabole, que d'une ligne

ligne moindre que Z : on montrera que deux quelconques côtés liés, circonſcrits à la ſpirale, comme l'arc BM, plus la touchante MC, ne different des deux côtés correſpondants en la parabole PK, plus KQ, que d'une ligne, qui, priſe autant de fois qu'il y a d'arcs en la circonférence, eſt moindre que Z. D'où il s'enſuit néceſſairement que toutes les différences priſes chacune une fois ſeront moindres que Z.

Je dis donc que la différence entre deux quelconques côtés liés BM, plus MC, & les correſpondants PK, plus KQ, priſe autant de fois qu'il y a d'arcs, eſt moindte que Z.

Car puiſque CE eſt égal à QZ, que les angles Z & CEV ſont droits, & que les angles ECI du rayon avec la touchante de la ſpirale, & ZQK de l'ordonnée avec la touchante de la parabole, ſont égaux : il s'enſuit que EI eſt égal à ZK, & CI à QK, & OI à KP ou à YL ou au demi-arc $Y9$.

Maintenant puiſque EV touche le cercle BE en E, la portion IV eſt toute hors le cercle ; & puiſque BVY eſt inclinée en angle aigu, & auſſi CI (l'angle au point E étant droit) : il s'enſuit par la premiere propriété du cercle, que les droites BV, MI ſont toutes hors le cercle ; donc les trois droites BV, VI, IM, étant toutes hors le cercle, l'arc BM, par le principe d'Archimede, ſera moindre

dre que les trois droites, ou que ces quatre droites *BV*, *VO*, *OI*, *IM*; donc, par le Lemme précédent, la différence entre l'arc *BM* & les deux quelconques *OI*, plus *IM*, sera moindre que les quatre *BV*, *VO*, *OI*, *IM*, ou que les trois *BV*, *VI*, *IM*. Donc la différence, qui est toute la même, entre l'arc *BM*, plus *MC*, & les deux *OI*, plus *IMC*, ou les deux *PK*, plus *KQ*, est moindre que *BV*, plus *VI*, plus *IM*.

Donc pour montrer que la différence entre *BM*, plus *MC*, & *PK*, plus *KQ*, prise autant qu'il y a d'arcs, est moindre que *Z*, il suffira *à fortiori*, de montrer que ces trois ensemble *BV*, plus *VI*, plus *IM*, prises autant de fois, sont moindres que *Z*. Et cela est aisé, puisque chacune d'elles, prise autant de fois, est moindre qu'un tiers de *Z*.

Car cela est déja montré de *BV*.

Cela est aussi aisé de *VI*, puisqu'elle est égale à l'arc *Y*9 (chacune des deux *VO*, *OI* étant montrée égale à un demi-*Y*9), & qu'ainsi *VI* étant prise autant de fois qu'il y a d'arcs, ne sera qu'égale à l'arc *BE*, & partant moindre qu'un tiers de *Z*.

Il ne reste donc qu'à le montrer de *IM*, en cette sorte.

Soit prise dans la figure séparée, *sh* égale à *EI*; & soient menées *ho* 2, parallele à *c* 8, & *hcf* perpendiculaire à *scq*. Soit maintenant menée *hrp*, faisant l'angle *hps* égal à l'angle *ICE* de la *Fig.* 40:

donc elle tombera entre *hf* & *h* 2, puiſque l'angle *hps* ou *ECI*, du rayon avec la touchante de la ſpirale, eſt moindre que l'angle *s* 2 *h* ou *st* 8 (à cauſe qu'au triangle rectangle *st* 8, la baſe eſt à la hauteur comme le rayon à la circonférence) & plus grand que la moitié de l'angle *BAE*, ou que l'angle *IEB*, ou *hsx*, ou *hfs* : mais l'angle *C* eſt droit; donc l'angle *hro* eſt obtus : & partant *hr* eſt moindre que *ho* : mais *ho* eſt à 8 *q* comme *hs* à *s* 8. Donc il y a moindre raiſon de *hr* à 8 *q*, que de *hs* à *s* 8 : donc *à fortiori* il y a moindre raiſon de *hr* à un tiers de *Z*, que de *hs* ou *EI*, à la circonférence *BEB*, moindre que *s* 8, & *à fortiori*, que de *EV* ou l'arc *BE* à la circonférence. Donc *hr*, priſe autant de fois que l'arc *BE* eſt en ſa circonférence, eſt moindre qu'un tiers de *Z*.

Et partant *IT* (qui eſt égal à *hs*, toutes choſes étant pareilles), & *à fortiori IM*, pris autant qu'il y a d'arcs, ſera moindre qu'un tiers de *Z*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cette même conſtruction que la figure inſcrite en la parabole, ne differe de la circonſcrite à la même parabole, que d'une ligne moindre que *Z*.

Car en tout triangle rectangle ou amblygone, l'excès dont les deux moindres côtés enſemble ſurpaſſent

paſſent le plus grand, eſt toujours moindre que chacun des côtés. D'où il s'enſuit que deux côtés liés quelconques de la figure circonſcrite, comme *P K*, plus *K Q*, ſurpaſſent l'inſcrite *P Q* d'une ligne moindre que le côté *P K* (puiſque l'angle de la touchante avec la parallele à l'axe, eſt toujours obtus, ſi ce n'eſt au ſommet où il eſt droit); donc tous les excès enſemble, dont les côtés liés de la circonſcrite, ſurpaſſent les côtés liés de l'inſcrite, ſont moindres que tous les côtés *P K* enſemble, c'eſt-à-dire, moindres que *Y L* pris autant de fois qu'il y a d'inſcrites, ou qu'il y a d'arcs en la circonférence; or *Y L* ou la moitié de *Y 9* priſe autant de fois, eſt moindre que *Z*; donc tous les excès enſemble dont les côtés circonſcrits ſurpaſſent les inſcrites, ſont moindres que *Z*.

THÉORÊME.

Si une parabole & une ſpirale ſont en la condition ſuppoſée : je dis que la ligne parabolique eſt égale à la ligne ſpirale.

Car ſi elles ne ſont pas égales, ſoit *X* la différence; & ſoit *Z* le tiers de *X*; & ſoient inſcrites & circonſcrites à la parabole & à la ſpirale des figures comme en la précédente, en ſorte que la différence entre les inſcrites ſoit moindre que *Z*, & que la différence entre les circonſcrites ſoit auſſi moindre que *Z*.

Maintenant puiſque la ligne ſpirale eſt moindre que le tour de la figure qui lui eſt circonſcrite, & plus grande que le tour de l'inſcrite : il s'enſuit que la différence entre la ligne ſpirale & le tour de la figure qui lui eſt inſcrite, eſt moindre que *Z*; & de même pour la parabole (puiſque la différence entre l'inſcrite & la circonſcrite, eſt moindre que *Z*, par la conſtruction) ; mais la différence entre l'inſcrite en la ſpirale & l'inſcrite en la parabole, eſt auſſi moindre que *Z*, par le Corollaire de la précédente. Donc la différence entre la ligne ſpirale & le tour de l'inſcrite en la parabole, eſt néceſſairement moindre que deux *Z*. Mais la différence entre l'inſcrite en la parabole & la ligne même de la parabole, eſt moindre que *Z*. Donc la différence entre la ligne de la ſpirale & la ligne de la parabole eſt néceſſairement moindre que trois *Z*, c'eſt-à-dire, que *X*, contre la ſuppoſition.

On montrera toujours la même abſurdité, quelque différence qu'on ſuppoſe entre les lignes ſpirale & parabolique. Donc il n'y en a aucune : donc elles ſont égales. Ce qu'il falloit démontrer.



LETTRE



LETTRE DE M. HUGUENS DE ZULICHEM *A M. DETTONVILLE.*

MONSIEUR,

LE Gentilhomme inconnu ne peut vous avoir fait entendre que la moindre partie de l'estime que j'ai pour vous; & si vous n'en croyez beaucoup davantage, vous ne savez non plus combien j'ai eu de joie en recevant celle que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire : ne pouvant l'exprimer dignement, je vous dirai seulement que je me crois bien plus heureux qu'auparavant, après avoir reçu les offres de votre amitié, & que je répute cette acquisition pour la plus insigne que j'aie à faire jamais. Je suis si loin de croire de l'avoir méritée par l'accueil que j'ai fait à cet excellent homme, qu'au contraire je sais bien qu'il faut que j'en demande pardon, ne l'ayant pas traité, ni selon sa condition, ni même selon que méritoient celles de ses qualités qu'il n'a pu me celer. Je le prierai de ne point s'en souvenir, & vous, Monsieur, de croire qu'à l'avenir je tâcherai de m'acquitter mieux envers ceux qui m'apporteront de vos nouvelles. J'ai été bien aise de voir que mon invention des Horloges est dans votre approbation, quoique les éloges qu'il vous a plu lui donner, sont beaucoup au-dessus de ce qu'elle mérite. Il y a beaucoup de hasard à rencontrer des choses semblables, & fort peu de science ou de subtilité. Aussi ne sont-elles propres qu'à acquérir du crédit aux Ma-

thématiques parmi le commun des hommes; au lieu que des Lettres (1) comme vous allez nous en produire, seront suivies, avec raison, de l'admiration & de l'étonnement des plus savants. Je ne suis pas de ce nombre; mais j'ai un desir incroyable de voir la suite de cette merveilleuse Lettre (2) dont vous m'avez fait la faveur de m'envoyer le commencement, & d'autant plus, que cet échantillon me fait espérer que nous y trouverons les choses les plus sublimes traitées avee toute la clarté & évidence possible. Vous ne devez donc pas craindre de grossir vos paquets de ces feuilles si précieuses; mais croire au contraire que vous m'obligerez infiniment de le faire le plutôt que vous pourrez. J'ai essayé quelques-uns de vos problêmes, mais sans prétendre aux Prix; & je me crois heureux de n'avoir pas entrepris la solution des plus difficiles, parce que tant de personnes plus intelligentes que moi n'en ayant pu venir à bout, cela me fait conclure que ma peine, aussi-bien que la leur, auroit été perdue: même dans ce que je crois avoir trouvé, j'ai commis une erreur assez lourde, de laquelle je ne me suis apperçu que depuis avoir vu que mon calcul ne répondoit pas au vôtre. Je parle de la proportion que vous avez trouvée de sept fois le diametre à six fois la circonférence, qui est vraie, & non pas la mienne, que je crois que vous avez vue dans la Lettre que j'ai envoyée il y a quelque temps à M. de Carcavi. Vous jugerez bien pourtant que je ne me suis abusé qu'au calcul, & non pas à la méthode, laquelle je connois assurément être sans faute,

(1) Huguens fait allusion aux différentes pieces composées par Pascal à l'occasion de ses Problêmes sur la Cycloïde, & imprimées dans ce Volume.

(2) Lettre à M. de Carcavi par A. Dettonville, ci-dessus page 229.

puisqu'elle

puiſqu'elle confirme votre propoſition ſuſdite : & je pourrois par-là même trouver encore le centre de gravité de la moitié du ſolide que fait le double eſpace *BCG* dans votre Figure à l'entour de ſa baſe, mais non pas aux autres cas, faute de ſavoir le centre de gravité de certaines portions du cylindre. J'ai prié M. de Carcavi de vous communiquer auſſi ce que j'avois ajouté dans ladite Lettre touchant les ſuperficies des Conoïdes & Sphéroïdes, & de la longueur de la ligne parabolique. Et peu de jours après avoir envoyé cette Lettre, je trouvai le centre de gravité de la ligne cycloïde & de ſes parties coupées par une parallele à la baſe, qui ont cette propriété étrange, que leur centre de gravité diviſe leur axe toujours en la raiſon de 1 à 2, comme vous ſavez, Monſieur ; mais vous ſaurez auſſi que je ne vous parle de ces choſes que pour vous faire voir l'inclination que je garde toujours pour la ſcience dans laquelle vous excellez ſi fort, afin que vous m'en eſtimiez d'autant plus digne de profiter de votre inſtruction. Je ſouhaite que ce puiſſe être bientôt, & il me tarde fort de joindre la qualité de votre Diſciple à celle de, Monſieur, votre, &c.

A la Haye, ce 5 Février 1659.

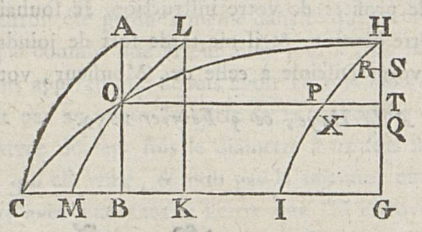




LETTRE DE M. SLUZE
A M. PASCAL.

MONSIEUR,

BIEN que je devrois paſſer pour importun, je ne ſaurois m'abſtenir de vous témoigner par la préſente le contentement que j'ai reçu d'apprendre de vos Traités que le peu que j'avois démontré touchant les Cycloïdes conſidérées univerſellement, a tant de rapport avec vos principes. Il me ſouvient de vous avoir envoyé un Lemme, l'automne paſſé, ſur lequel eſt fondé tout ce que j'avois trouvé. En voici un exemple. Soit un triligne compoſé de l'angle droit



ABC & de la courbe *CA* : & par le mouvement de la figure *ABC* ſur *AB* prolongée, & un autre mouvement égal du point *C* ſur la courbe *AC*, ſoit décrite la cycloïde *COH*. Soit auſſi le point *X* le centre de gravité de la courbe *IPH* égale à *CA*, duquel ſoit menée à *HG*, la perpendiculaire *XQ* : je dis que le triligne mixtiligne *CHA* au triligne mixtiligne *CHI*, aura toujours la même raiſon que *HQ* à *QG*. De même en prenant quelque point en la

la cycloïde, comme *O*, par lequel paſſe le triligne générateur *MOLK*, & menant *OPT* parallele à *CG*, ſi *R* eſt centre de la courbe *PH*, duquel on applique *RS*, le triligne *LOH* au triligne *HOP* ſera toujours en même raiſon de *HS* à *ST*. D'où s'enſuit (ſuppoſant le triangle générateur connu), que quand nous avons le centre de peſanteur de la ligne courbe du triligne & des parties d'icelle, nous avons auſſi la quadrature de la Cycloïde; & qu'ayant d'ailleurs la quadrature de la Cycloïde, nous avons le centre de la courbe qui l'engendre, & d'où auſſi l'on peut tirer quantité d'autres conſéquences que vous avez déja tirées, ou que vous tirerez ſans difficulté. Mes principes ſont quaſi les mêmes que ceux dont vous vous êtes ſervi; je le vois par les regles de la Statique & par les nombres (comme vous avez pu remarquer dans le Lemme que je vous ai envoyé); mais votre application eſt plus belle & plus univerſelle. Pardonnez à mon incivilité, ſi j'interromps vos occupations plus ſérieuſes, quoique ce ſoit une faute dans laquelle je ſuis en haſard de retomber encore ci-après; car ſi je puis rencontrer un jour le loiſir que je n'ai pu avoir juſqu'à préſent, d'étudier parfaitement vos principes, je prendrai la hardieſſe de vous écrire, s'il y a en quoi j'aie eu le bonheur de rencontrer quelque choſe qui ait du rapport avec iceux; & j'eſpere que vous aurez la bonté de le ſouffrir de celui qui eſt abſolument, Monſieur, votre, &c.

A Liege, ce 29 Avril 1659.

LETTRE



LETTRE DE M. SLUZE *A M. PASCAL.*

MONSIEUR,

AYANT rencontré avant-hier l'occasion d'un ami qui s'en alloit à Sédan, je l'ai chargé de quelques copies du Livre dont je vous avois écrit il y a quinze jours, & j'espere qu'elles arriveront à Paris en même-temps que la présente, ou au moins avec les Coches de Sédan. Le paquet porte l'inscription de votre nom; mais en cas que l'on tardât à vous le porter, vous m'obligerez fort de le faire prendre au logis où les Coches arrivent, & me donner votre sentiment sur le contenu du Livre, pendant que je demeure inviolablement, Monsieur, votre, &c.

A Liege, le 19 Juillet 1659.





LETTRE DE M. LEIBNITZ A M. PÉRIER,

Conſeiller à la Cour des Aides de Clermont-Ferrand, Neveu de M. Paſcal.

MONSIEUR,

VOUS m'avez obligé ſenſiblement, en me communiquant les manuſcrits (1) qui reſtent de feu M. Paſcal, touchant les Coniques. Car, outre les marques de votre bienveillance, que j'eſtime beaucoup, vous me donnez moyen de profiter par la lecture des méditations d'un des meilleurs eſprits du ſiecle : je ſouhaiterois pourtant d'avoir pu les lire avec un peu plus d'application ; mais le grand nombre de diſtractions qui ne me laiſſent pas diſpoſer entiérement de mon temps, ne l'ont pas permis. Néanmoins je crois les avoir lues aſſez pour pouvoir ſatisfaire à votre demande, & pour vous dire que je les tiens aſſez entieres & finies, pour paroître à la vue du public ; & afin que vous puiſſiez juger ſi je parle avec fondement, je veux vous faire un récit des pieces dont elles ſont composées, & de la maniere que je crois qu'on peut les ranger.

I. Il faut commencer par la piece dont l'inſcription eſt :

(1) J'ai écrit, & fait écrire de tous côtés, pour me procurer ces Ouvrages de Paſcal, dont parle Leibnitz ; mais juſqu'à préſent mes recherches à ce ſujet ont été preſque inutiles.

Generatio

Generatio coni ſectionum tangentium & ſecantium, ſeu projectio peripheriæ, tangentium, & ſecantium circuli, in quibuſcunque oculi, plani ac tabellæ poſitionibus. Car c'eſt le fondement de tout le reſte.

II. Après avoir expliqué la génération des ſections du cône, faite optiquement par la projection d'un cercle ſur un plan qui coupe le cône des rayons, il explique les propriétés remarquables d'une certaine figure, compoſée de ſix lignes droites, qu'il appelle, *Hexagramme myſtique.* J'ai mis au-devant ces mots, *de hexagrammo myſtico & conico :* une partie de cette piece ſe trouve répétée & inſérée mot à mot dans une autre, ſavoir, les définitions (avec leurs corollaires); & les propoſitions (mais ſans les démonſtrations) qui ſe trouvent répétées dans le Traité *de loco ſolido*, ſuppléeront au défaut de quelques-unes qui manquent dans celui-ci *de hexagrammo.*

Le IIIe Traité doit être, à mon avis, celui qui porte cette inſcription : *De quatuor tangentibus, & rectis puncta tactuum jungentibus, undè rectarum harmonicè ſectarum & diametrorum proprietates oriuntur.* Car c'eſt là-dedans que l'uſage de l'hexagramme paroît, & que les propriétés des centres & des diametres des ſections coniques ſont expliquées. Je crois qu'il n'y manque rien.

Le IVe Traité eſt : *de proportionibus ſegmentorum ſecantium & tangentium.* Car les propriétés fondamentales des ſections coniques, qui dépendent de la connoiſſance du centre & des diametres, étant expliquées dans le Traité précédent, il falloit donner quelques belles propriétés univerſellement conçues, touchant les proportions des droites menées à la ſection conique; & c'eſt de-là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnées. Les figures y ſont auſſi, & je ne vois rien qui manque. J'ai mis après ce Traité une

une feuille, qui porte pour titre ces mots : *De correspondentibus diametrorum*, dont la troisieme page traite *de summâ & differentiâ laterum seu de focis.*

Le V[e] Traité est : *de tactionibus conicis*, c'est-à-dire (afin que le titre ne trompe pas), *de punctis & rectis quas sectio conica attingit;* mais je n'en trouve pas toutes les figures.

Le VI[e] Traité sera, *de loco solido :* j'y ai mis ce titre, parce qu'il n'y en a point: c'est pour ce sujet que Messieurs Descartes & Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus leur en ayant donné l'occasion. Or je crois que M. Pascal a voulu donner ce Traité à part, ou le communiquer au moins à ses amis, parce qu'il y répete beaucoup de choses du deuxieme Traité, mot à mot & assez au long; c'est pourquoi il commence par ceci: *Definitiones excerptæ ex conicis;* savoir, du deuxieme Traité susdit, où il explique ce qu'il entend par ces mots, *hexagrammum mysticum, conicum*, &c. On peut juger par-là que le premier, le second, le troisieme & peut-être le cinquieme Traité, doivent faire proprement les coniques; & ce mot se trouve aussi au dos du premier Traité. Les grandes figures appartiennent à ce sixieme Traité.

J'ai mis ensemble quelques fragments. Il y a un papier imprimé (1) dont le titre est : *Essai des coniques ;* & comme il s'y trouve deux fois tout de même, j'espere que vous permettrez, Monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment, *de restitutione coni ;* savoir, les diametres & parametres étant donnés, retrouver les sections coniques. Ce

(1) Cet Écrit, le seul de tous ceux dont parle Leibnitz, que j'aie pu me procurer, est imprimé à la tête du quatrieme Volume de cette édition.

discours

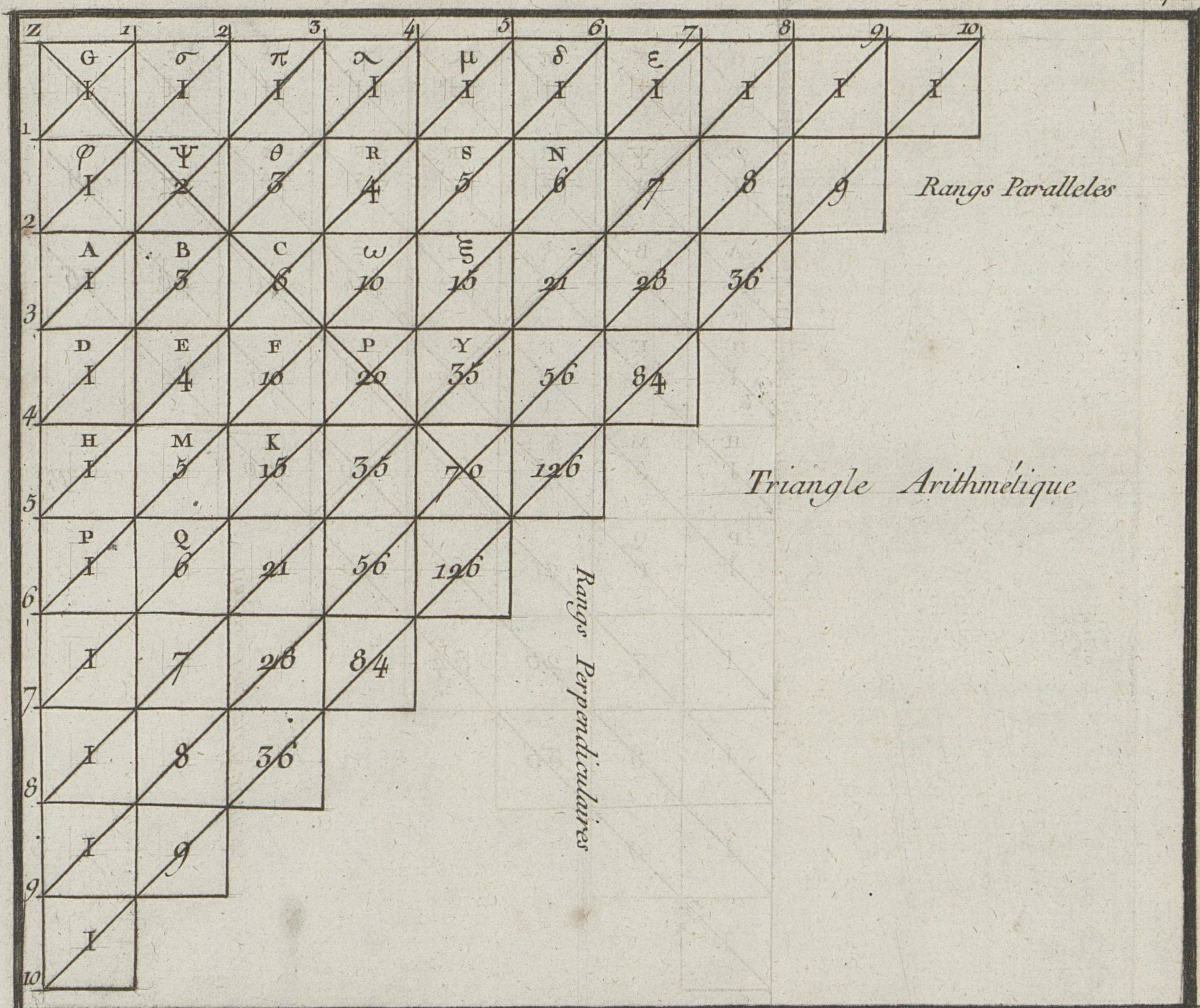
diſcours paroît entier & a ſes figures. Il y a un autre fragment où ſe trouvent ces mots au commencement, *magnum problema;* & je crois que c'eſt celui-ci qui y eſt compris: *Dato puncto in ſublimi, & ſolido conico ex eo deſcripto, ſolidum ita ſecare, ut exhibeat ſectionem conicam datæ ſimilem :* mais cela n'eſt pas mis au net.

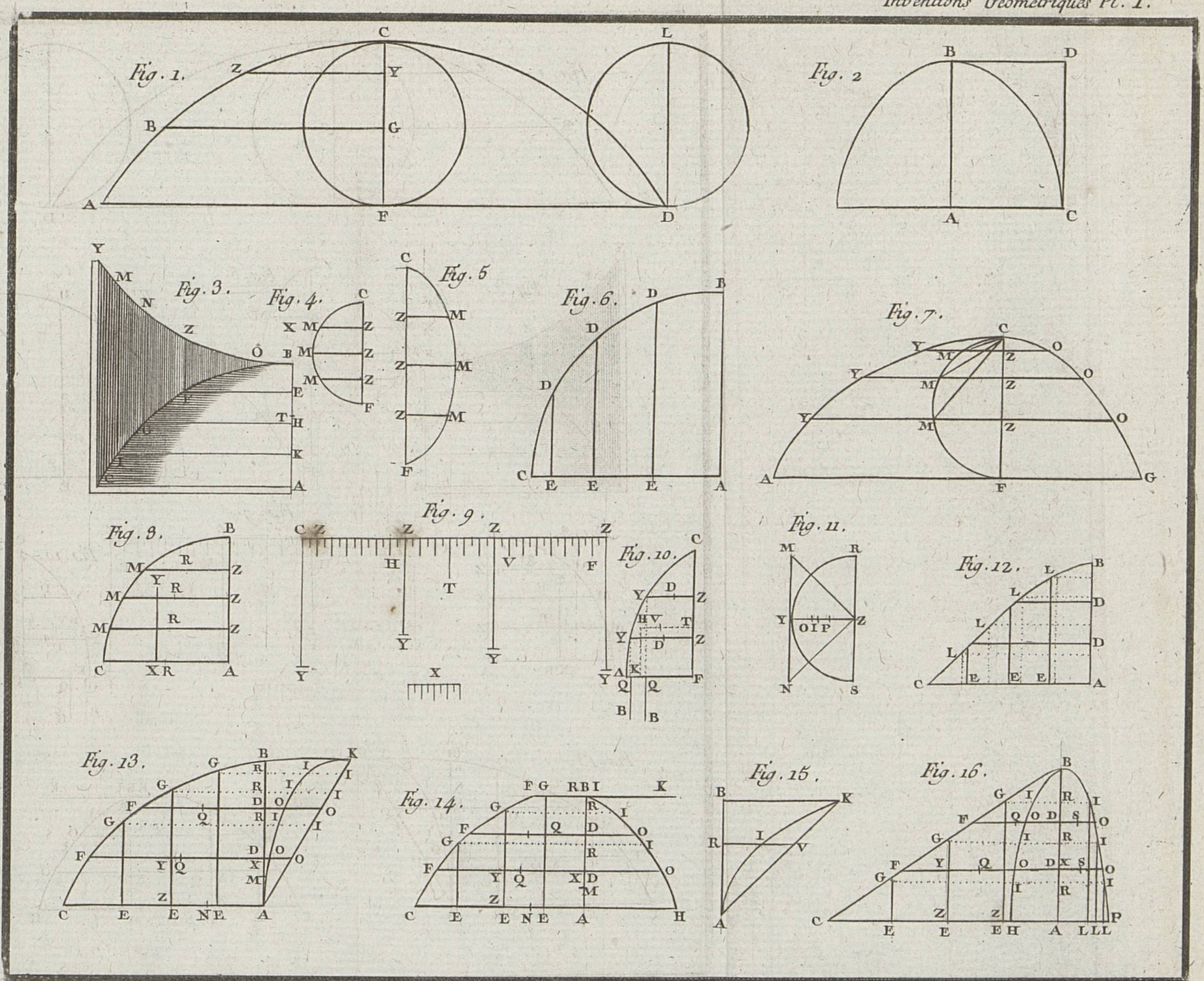
Il y a quelques problêmes ſur une autre feuille, qui ſont cotés; mais il en manque le premier; on en dira ce qu'on pourra en forme d'Appendice; mais le corps de l'Ouvrage, composé des ſix premiers Traités, me paroît aſſez net & achevé.

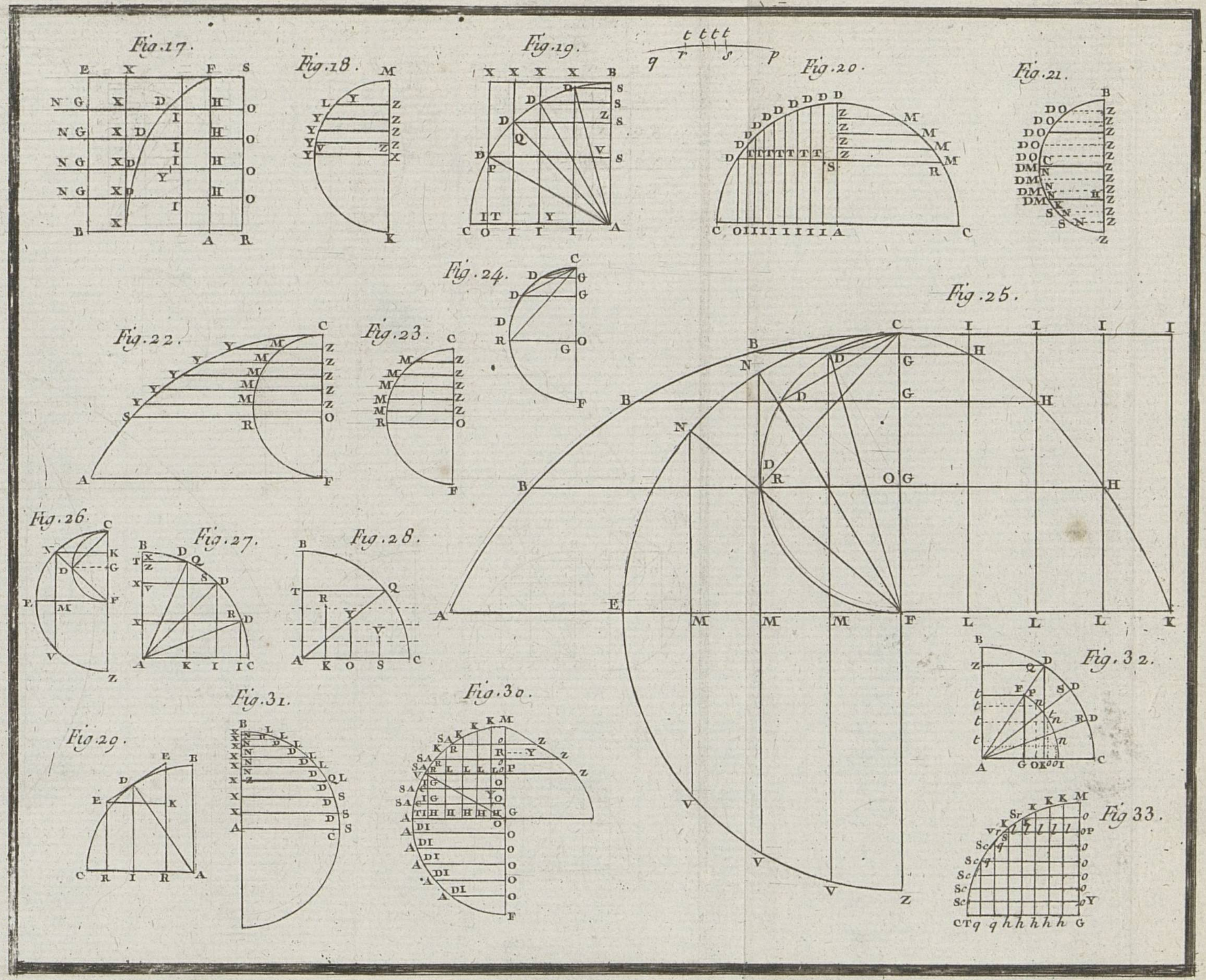
Je conclus que cet Ouvrage eſt en état d'être imprimé; & il ne faut pas demander s'il le mérite; je crois même qu'il eſt bon de ne pas tarder davantage, parce que je vois paroître des Traités qui ont quelque rapport à ce qui eſt dans une partie de celui-ci : c'eſt pourquoi je crois qu'il eſt bon de le donner au plutôt, avant qu'il perde la grace de la nouveauté. J'en ai parlé plus amplement à MM. vos freres, dont je vous dois la connoiſſance, & que j'ai priés de me conſerver l'honneur de votre bienveillance. J'avois eſpéré de vous revoir un jour ici; mais je vois que vos affaires ne l'ont pas encore permis, & j'ai peu d'eſpérance de paſſer par Clermont. Je ſouhaiterois de pouvoir vous donner des marques plus convaincantes de l'eſtime que j'ai pour vous, & de la paſſion que j'ai pour tout ce qui regarde feu M. Paſcal; mais je vous ſupplie de vous contenter cependant de celle-ci. Je ſuis, Monſieur, votre très-humble & très-obéiſſant ſerviteur, LEIBNITZ.

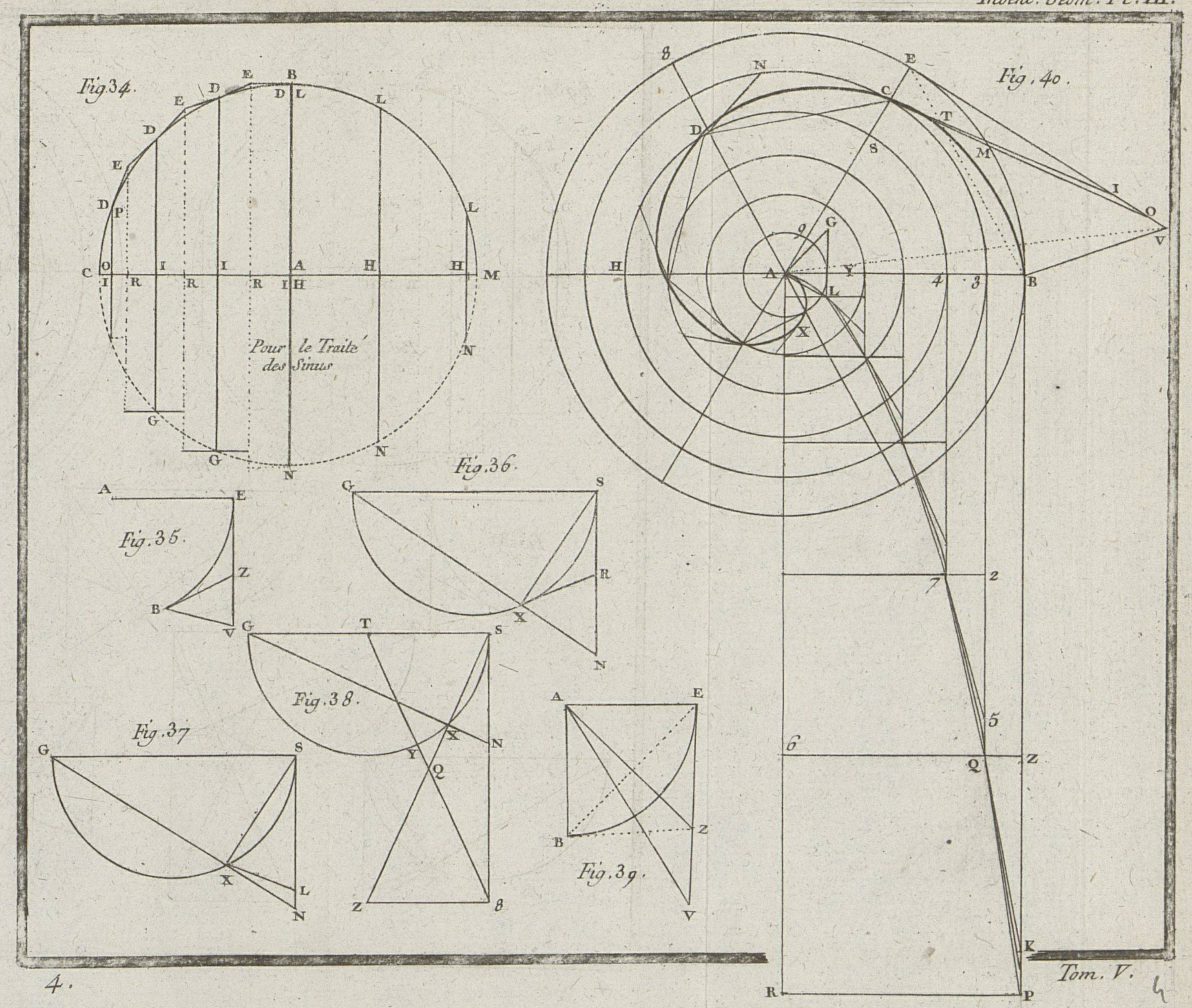
A Paris, le 30 Août 1676.

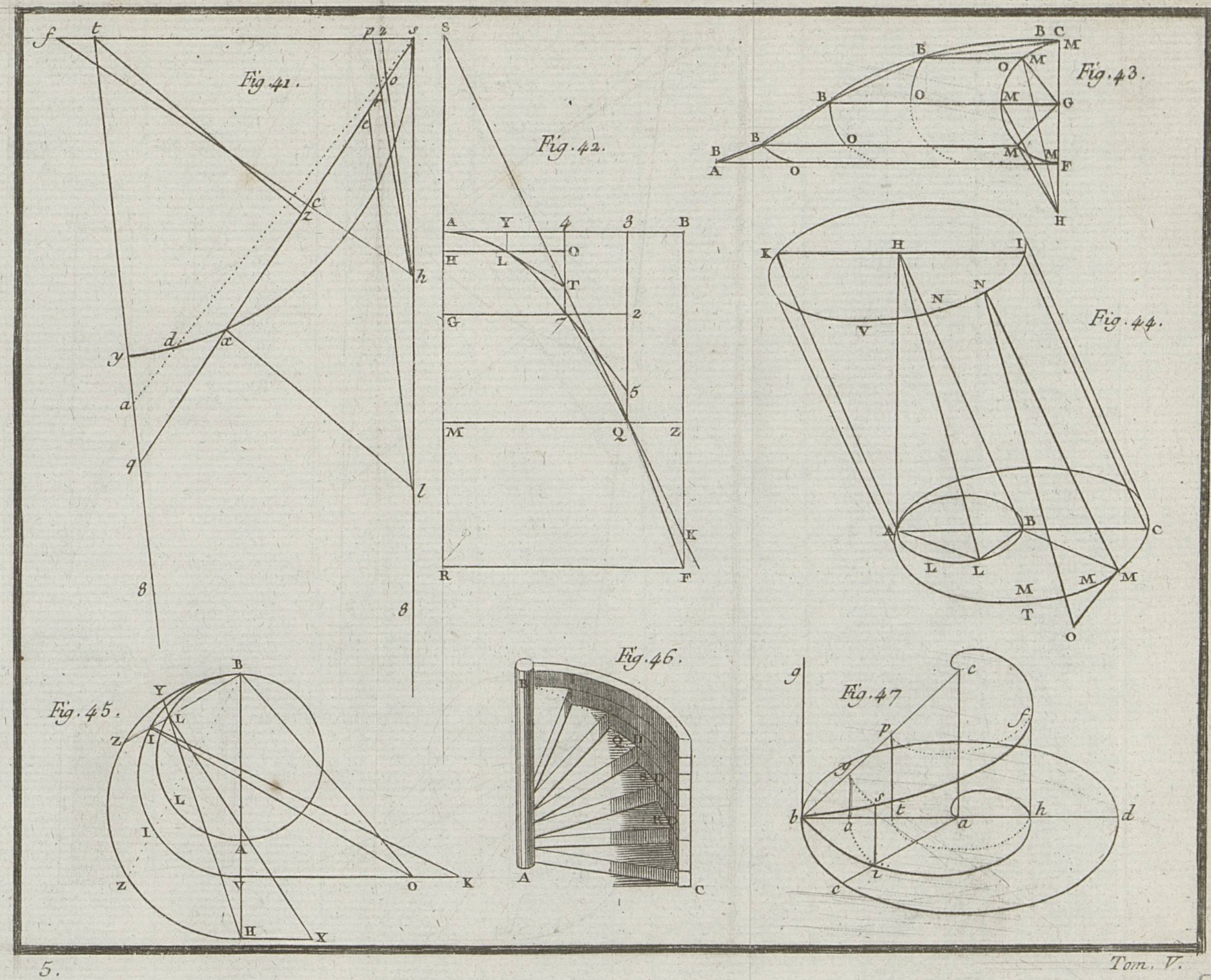
FIN DU CINQUIEME ET DERNIER TOME.


Z 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
G σ π λ μ δ ε
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
φ Ψ θ R S N
1 2 3 4 5 6 7 8 9
A B C ω ξ
1 3 6 10 15 21 28 36
D E F P Y
1 4 10 20 35 56 84
H M K
1 5 15 35 70 126
P Q
1 6 21 56 126
1 7 28 84
1 8 36
1 9
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Rangs Paralleles
Triangle Arithmétique
Rangs Perpendiculaires


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

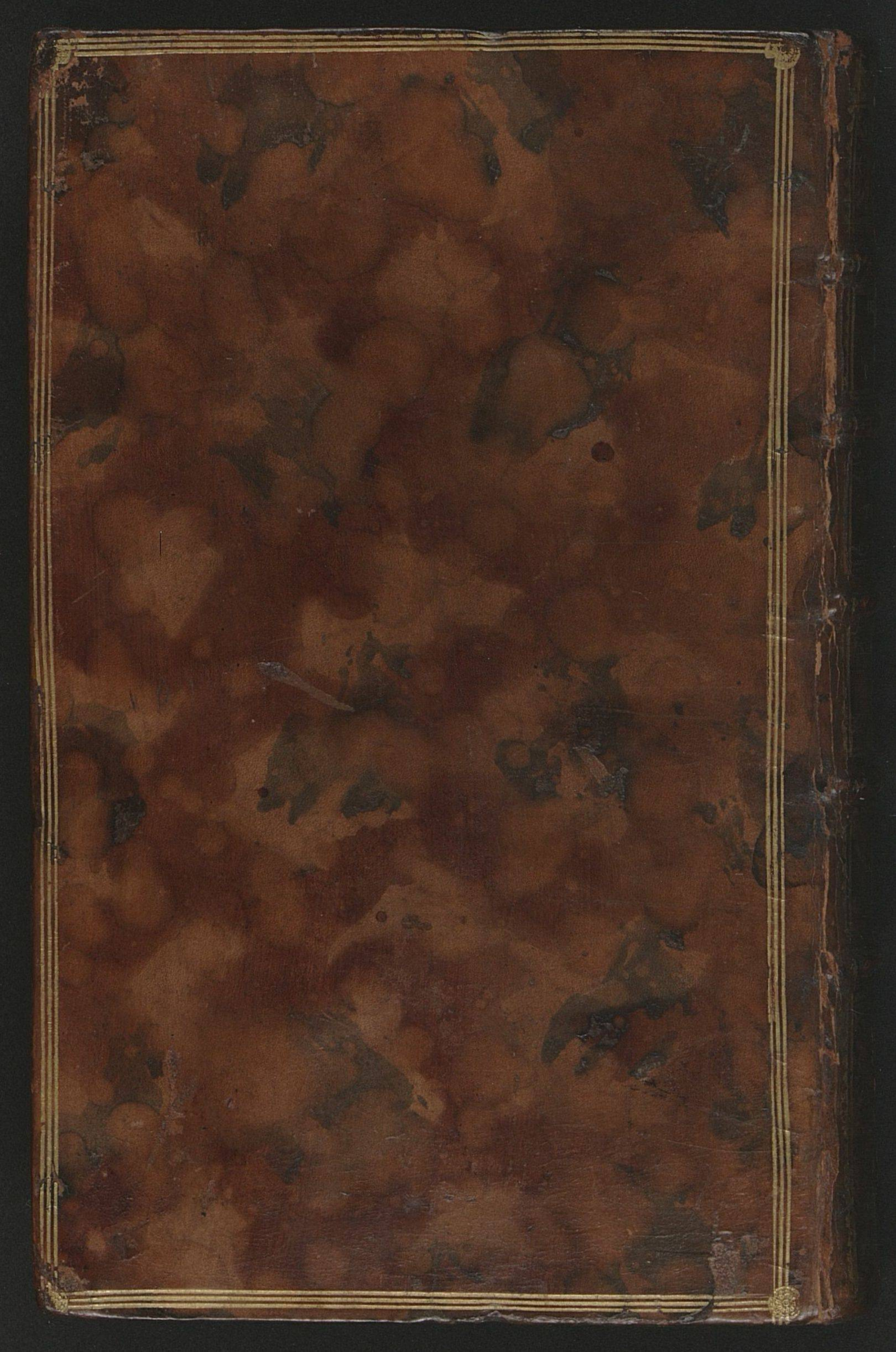

Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.


Fig. 34.
Pour le Traité des Sinus
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.


Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47







OEUVRES
DE
PASCAL

TOM V









inches 4 3 2 1 0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams